

**Titre:** Analyse et implantation d'un outil d'optimisation numérique des paramètres de martelage  
Title:

**Auteur:** Jacques Luk-Cyr  
Author:

**Date:** 2017

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Luk-Cyr, J. (2017). Analyse et implantation d'un outil d'optimisation numérique des paramètres de martelage [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/2577/>  
Citation:

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/2577/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Aurelian Vadean, Henri Champlaud, & Jacques Lanteigne  
Advisors:

**Programme:** Génie mécanique  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ANALYSE ET IMPLANTATION D'UN OUTIL D'OPTIMISATION NUMÉRIQUE DES  
PARAMÈTRES DE MARTELAGE

JACQUES LUK-CYR  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
MAI 2017

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

ANALYSE ET IMPLANTATION D'UN OUTIL D'OPTIMISATION NUMÉRIQUE DES  
PARAMÈTRES DE MARTELAGE

présentée par : LUK-CYR Jacques

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

Mme BROCHU Myriam, Ph. D, présidente

M. VADEAN Aurelian, Doctorat., membre et directeur de recherche

M. CHAMPLIAUD Henri, Ph. D., membre et codirecteur de recherche

M. LANTEIGNE Jacques, Ph. D., membre et codirecteur de recherche

M. LE DIGABEL Sébastien, Ph. D., membre

M. BRAILOVSKI Vladimir, Ph. D., membre externe

## DÉDICACE

*À toute ma famille,  
à ma fiancée,  
pour votre amour et votre support. . .*



## REMERCIEMENTS

En premier lieu, j'aimerais remercier mon directeur et mes codirecteurs de recherche, Aurelian Vadean, Henri Champlaud et Jacques Lanteigne, pour leur support incroyable, leur esprit pied-à-terre, leur patience et rigueur.

Ce travail n'aurait été possible sans mes collègues de bureau, eux qui ont partagé leur connaissance avec moi et m'ont aidé tout au long de mon parcours. Mes remerciements à Mathieu Gendron, Dr. Mehdi Falsafioon, Maud-Louise Foudrinier, Dr. Daniel Paquet, Jean-Loup Curtat et Pierre-Anthony Deschênes. Je voudrais aussi remercier Carlo Baillargeon pour son expertise et aide en laboratoire.

Je voudrais remercier ma famille, beaux-frères, belles-soeurs, parents, soeur, pour toujours être disponible en temps de besoin. Finalement, je remercie ma fiancée, bientôt femme, Thi-Ha, pour être ce qu'elle est, et de m'avoir choisi malgré mon choix de carrière.

Mes remerciements au Conseil de Recherches en Sciences et en Génie du Canada, ainsi qu'au Consortium de Recherche en Fabrication et Réparation des Roues d'Eau pour leur support financier.

## RÉSUMÉ

Ce projet de thèse propose une méthodologie d'analyse et d'optimisation des paramètres de martelage et vise ainsi l'amélioration de ce procédé de fabrication et réparation. Cette méthodologie a été développée afin d'aider dans le remplacement et la maintenance des installations vieillissantes du parc de production d'Hydro-Québec. Malgré tout, la méthode proposée peut s'avérer utile dans d'autres domaines, telle l'aéronautique, où l'optimisation des paramètres d'un procédé est nécessaire.

La méthode d'optimisation proposée est la méthode SAO (Sequential Approximate Optimization), qui consiste à combiner des concepts d'optimisation mathématique avec ceux des éléments finis. Ce mariage des domaines permet une économie importante en temps de calcul, ainsi qu'une réduction potentielle des coûts en réduisant le nombre d'itérations expérimentales nécessaires afin d'obtenir des paramètres de martelage optimaux. Plus important encore, la méthode proposée permet une exploration rigoureuse, mais efficace de l'espace des variables de design (paramètres de martelage). Ceci est un avantage important par rapport aux méthodes préalablement utilisées, car les simulations par éléments finis pour la modélisation du martelage sont coûteuses en temps de calcul et nécessitent des connaissances très avancées de la mise en oeuvre. Un des éléments importants dont traite ce projet est la nature des fonctions objectifs dans le cadre de l'optimisation. Sachant que l'état des contraintes résiduelles est un critère important dans la détermination de la qualité d'un martelage, des analyses préliminaires sont effectuées afin de trouver les candidats représentatifs qu'on dénote moniteurs de martelage.

De manière connexe, ce projet traite des propriétés mécaniques macroscopiques du matériau martelé, le E309L. Étant donné le peu d'informations disponibles dans la littérature, une caractérisation en traction mécanique uniaxiale, cyclique et à haute température a été effectuée. Ceci a pour fin de déterminer le modèle constitutif adéquat pour la représentation numérique du comportement dudit matériau. Dans ce document, plusieurs modèles ont été développés dans le but de fournir (i) des outils convoités par Hydro-Québec dans leur modélisation actuelle du martelage, mais (ii) aussi dans leurs efforts d'incorporer des modèles plus complexes et représentatifs. On parle ici de modèles constitutifs élasto-plastiques à grandes déformations, de couplage thermo-mécanique et de plasticité unifiée.

De par nos analyses, nous verrons aussi qu'il est possible qu'une nouvelle quantité, l'uniformité de martelage, soit plus appropriée que celle conventionnellement utilisée pour caractériser la qualité du grenailage, soit la couverture. Cette quantité semble favorablement

représenter l'évolution des moniteurs de martelage et donc la qualité de celui-ci.

Cette thèse a engendré la publication de trois (3) articles de journaux :

- A unified plasticity methodology for rate- and temperature-sensitive alloys exhibiting a non-linear kinematic hardening behaviour. *Publié dans Acta Mechanica Solida Sinica*. DOI : 10.1016/j.camss.2016.09.001
- Sequential approximate optimization of industrial hammer peening using finite element simulations. *Publié dans Structural and Multidisciplinary Optimization*. DOI : 10.1007/s00158-016-1538-7.
- Mechanical properties of 75% Ar / 25% CO<sub>2</sub> flux-cored arc welded E309L austenitic stainless steel. *Publié dans Materials Science and Engineering A*. DOI : 10.1016/j.msea.2016.09.099.

ainsi qu'un article en révision :

- Trajectory optimization of industrial hammer peening of weld seams using sequential approximate optimization. *Soumis à Optimization and Engineering*.

## ABSTRACT

In this thesis, a methodology for analyzing and optimizing hammer peening parameters is presented. Said methodology has been developed in response to the need of Hydro-Québec to repair and maintain its current power-generating infrastructures. However, the proposed methodology is general in the sense that it can be applied to other industries such as the aerospace, automotive or manufacturing industries where process optimization is required.

The Sequential Approximate Optimization (SAO) method is used in this thesis, which combines aspects of both mathematical optimization and finite elements. This allows for significant computational savings by reducing the need for costly, and time-consuming experimental measurements. Furthermore, the algorithm allows for a thorough exploration of the design space (for hammer peening parameters). This significant improvement compared to previously used methods is essential since finite element simulations of hammer peening are more often than not time-consuming. An important contribution of this thesis is the determination of the objective variables underlying the hammer peening process. As residual stress is known to play an important role in stress-inducing process such as shot- and hammer-peening, our analysis have found ideal objective variables, which we denote hammer peening monitors.

This thesis also addresses the mechanical properties of the hammer peened material, the austenitic stainless steel E309L. Given the lack of information available in the literature, experimental measurements were carried in order to obtain room temperature tension, elevated temperature tension and cyclic responses. Thereafter, multiple constitutive models were developed in order to: (i) provide Hydro-Québec with tools helping them in simulating hammer peening and welding; and (ii) integrate increasingly complex, but more representative models in their multi-physics simulation. More precisely, we refer to large deformation elastic-plastic, coupled thermo-mechanical and unified theories.

We also point out that our findings of an alternative quantity, peening uniformity, which describes the state of an hammer peened material, might be more appropriate than that used for characterizing shot peening. Peening uniformity indeed seem to evolve altogether with the hammer peening monitors and therefore the overall quality of the process.

We have published three (3) *peer-reviewed* papers along with this thesis:

- A unified plasticity methodology for rate- and temperature-sensitive alloys exhibiting a non-linear kinematic hardening behaviour. *Publié dans Acta Mechanica Solida Sinica*. DOI: 10.1016/j.camss.2016.09.001

- Sequential approximate optimization of industrial hammer peening using finite element simulations. *Publié dans Structural and Multidisciplinary Optimization*. DOI: 10.1007/s00158-016-1538-7.
- Mechanical properties of 75% Ar / 25% CO<sub>2</sub> flux-cored arc welded E309L austenitic stainless steel. *Publié dans Materials Science and Engineering A*. DOI: 10.1016/j.msea.2016.09.099.

as well as a paper under revisions:

- Trajectory optimization of industrial hammer peening of weld seams using sequential approximate optimization. *With Reviewers in Optimization and Engineering*.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	ix
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xiv
LISTE DES FIGURES . . . . .	xv
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . .	xx
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xxi
CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 Contexte . . . . .	1
1.2 Problématique . . . . .	2
1.3 Opportunité et objectifs de la thèse . . . . .	4
1.4 Organisation de la thèse . . . . .	4
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE . . . . .	6
2.1 Éléments finis . . . . .	6
2.2 Optimisation . . . . .	7
2.3 Implantation numérique du martelage . . . . .	8
2.3.1 Analyse expérimentale du martelage . . . . .	8
2.3.2 Modélisation du martelage . . . . .	10
2.4 Optimisation des procédés . . . . .	12
2.4.1 Structure du problème . . . . .	13
2.4.2 Plan d'expérience . . . . .	14
2.4.3 Choix des fonctions objectifs . . . . .	15
2.4.4 Métamodélisation . . . . .	16
2.4.5 Recherche optimale . . . . .	18

2.4.6	Solution Pareto optimale . . . . .	19
2.4.7	Algorithme de recherche . . . . .	22
2.4.8	Validation de la solution . . . . .	23
2.4.9	Choix des variables de conception . . . . .	25
2.4.10	Qualité d'un modèle de régression . . . . .	26
2.4.11	Sélection d'un modèle de régression . . . . .	27
2.5	Modèle constitutif pour l'acier martelé . . . . .	27
CHAPITRE 3	DESCRIPTION DE LA DÉMARCHE SCIENTIFIQUE . . . . .	32
3.0.1	Article 1 : A unified plasticity methodology for rate- and temperature-sensitive alloys exhibiting a non-linear kinematic hardening behaviour . . . . .	33
3.0.2	Article 2 : Sequential approximate optimization of industrial hammer peening using finite element simulations . . . . .	34
3.0.3	Article 3 : Mechanical properties of 75% Ar / 25% CO <sub>2</sub> flux-cored arc welded E309L austenitic stainless steel . . . . .	35
3.0.4	Article 4 : Trajectory optimization of industrial hammer peening of weld seams using sequential approximate optimization . . . . .	36
CHAPITRE 4	ARTICLE 1 : A UNIFIED PLASTICITY METHODOLOGY FOR RATE- AND TEMPERATURE-SENSITIVE ALLOYS EXHIBITING A NON-LINEAR KINEMATIC HARDENING BEHAVIOUR . . . . .	37
4.1	Abstract . . . . .	37
4.2	Introduction . . . . .	37
4.3	Unified plasticity constitutive methodology . . . . .	39
4.3.1	Strain additive decomposition . . . . .	40
4.3.2	Helmholtz free energy . . . . .	40
4.3.3	Direction of plastic flow . . . . .	42
4.3.4	Viscoplasticity theory . . . . .	43
4.4	Numerical example . . . . .	45
4.4.1	Calibration of material parameters . . . . .	45
4.4.2	Results and discussion . . . . .	47
4.5	Conclusion . . . . .	49
4.6	Acknowledgements . . . . .	50
4.7	Time-integration procedure . . . . .	54
4.8	Numerical tangent . . . . .	57
CHAPITRE 5	ARTICLE 2 : SEQUENTIAL APPROXIMATE OPTIMIZATION OF	

INDUSTRIAL HAMMER PEENING USING FINITE ELEMENT SIMULATIONS	61
5.1 Abstract . . . . .	61
5.2 Introduction . . . . .	61
5.3 Hammer peening implementation . . . . .	63
5.3.1 Finite element modelling . . . . .	63
5.3.2 Selection of objective functions . . . . .	65
5.4 Problem definition . . . . .	68
5.4.1 Hammer geometry optimization . . . . .	68
5.4.2 Peening process optimization . . . . .	69
5.5 Sequential approximate optimization algorithm . . . . .	69
5.5.1 Initial FE simulations . . . . .	70
5.5.2 Black-box approximation . . . . .	70
5.5.3 Multi-objective optimization . . . . .	72
5.5.4 Pareto optima validation . . . . .	72
5.5.5 Sequential improvement . . . . .	73
5.5.6 Summary . . . . .	73
5.6 Results and discussion . . . . .	74
5.6.1 Hammer geometry . . . . .	74
5.6.2 Peening process . . . . .	75
5.6.3 Sensitivity analysis . . . . .	76
5.6.4 Limitations . . . . .	79
5.7 Conclusion . . . . .	81
5.8 Acknowledgements . . . . .	81
CHAPITRE 6 ARTICLE 3 : MECHANICAL PROPERTIES OF 75% Ar / 25% CO <sub>2</sub>	
FLUX-CORED ARC WELDED E309L AUSTENITIC STAINLESS STEEL . . .	82
6.1 Abstract . . . . .	82
6.2 Introduction . . . . .	82
6.3 Experimental method . . . . .	83
6.3.1 Materials and welding method . . . . .	84
6.3.2 Microstructure . . . . .	85
6.3.3 Uniaxial tensile experiment . . . . .	86
6.4 Results and discussion . . . . .	86
6.4.1 Strain-rate sensivity . . . . .	86
6.4.2 Temperature sensitivity . . . . .	88
6.4.3 Isotropy . . . . .	91



6.4.4	Constitutive modelling . . . . .	93
6.5	Conclusions . . . . .	94
6.6	Acknowledgements . . . . .	96

## CHAPITRE 7 ARTICLE 4 : TRAJECTORY OPTIMIZATION OF INDUSTRIAL HAMMER PEENING OF WELD SEAMS USING SEQUENTIAL APPROXIMATE OP-

TIMIZATION . . . . .	97
7.1 Abstract . . . . .	97
7.2 Introduction . . . . .	97
7.3 Finite element modelling . . . . .	98
7.3.1 Hammer peening path . . . . .	100
7.4 Preliminary investigation . . . . .	102
7.4.1 Peening uniformity . . . . .	107
7.4.2 Sensitivity analysis . . . . .	107
7.4.3 Problem definition . . . . .	109
7.5 Sequential approximate optimization algorithm (SAO) . . . . .	109
7.5.1 Summary of the SAO algorithm . . . . .	110
7.5.2 Error measure . . . . .	111
7.5.3 Sequential improvement . . . . .	112
7.6 Results and discussion . . . . .	112
7.7 Conclusion . . . . .	116
7.8 Acknowledgements . . . . .	118

## CHAPITRE 8 THÉORIE THERMO-PLASTIQUE ET IMPLANTATION DANS ABAQUS . . . . .

8.1	Cinématique . . . . .	119
8.1.1	Notions de base . . . . .	119
8.2	Équilibre des forces et des moments . . . . .	120
8.3	Équilibre d'énergie et d'entropie . . . . .	121
8.4	Décomposition élastique/plastique . . . . .	122
8.5	Théorie constitutive . . . . .	123
8.5.1	Hypothèses constitutives . . . . .	123
8.5.2	Restrictions thermodynamiques . . . . .	123
8.5.3	Écoulement plastique . . . . .	124
8.5.4	Équations dissipatives . . . . .	125
8.5.5	Conséquences additionnelles de la thermodynamique . . . . .	125
8.5.6	Isotropie . . . . .	126

8.6	Sommaire . . . . .	127
8.6.1	Équations constitutives . . . . .	127
8.7	Spécialisation . . . . .	130
8.7.1	Énergie libre . . . . .	130
8.8	Intégration numérique . . . . .	130
8.9	Formulation variationnelle . . . . .	134
8.10	Tangente algorithmique . . . . .	136
8.11	Description d'un élément . . . . .	138
8.11.1	État plan de déformation . . . . .	138
8.11.2	Axisymétrie . . . . .	139
8.12	Conclusion . . . . .	139
CHAPITRE 9 DISCUSSION GÉNÉRALE . . . . .		141
9.1	Limitations . . . . .	141
CHAPITRE 10 CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS . . . . .		144
10.1	Synthèse des travaux et contributions . . . . .	144
10.2	Travaux futurs . . . . .	145
RÉFÉRENCES . . . . .		147
ANNEXES . . . . .		161

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1	Composition chimique typique des aciers E309L et 304L (wt.%). Les limites acceptables maximales sont indiquées . . . . .	30
Tableau 4.1	Viscoplastic properties for stainless steel 304L. Experimental data of Paquet et al. (2012) . . . . .	47
Tableau 4.2	Constant hardening parameters for stainless steel 304L. Experimental data of Paquet et al. (2012) . . . . .	48
Tableau 4.3	Temperature-dependent hardening parameters for stainless steel 304L. Experimental data of Paquet et al. (2012) . . . . .	48
Tableau 4.4	Material parameters for the rate-dependent resistance $S^*$ . . . . .	49
Tableau 4.5	Cyclic loading experiments of Paquet (2006) at room temperature for stainless steel 304L . . . . .	49
Tableau 5.1	Design and objective variables for hammer geometry optimization . .	68
Tableau 5.2	Design and objective variables for hammer peening process optimization	69
Tableau 5.3	Selected Pareto optima (red marker) for the hammer optimization subproblem (5.1) . . . . .	75
Tableau 5.4	Number of evaluations until convergence for subproblems (5.1)-(5.2) .	75
Tableau 5.5	Selected Pareto optima (triangle black marker) for the hammer peening process optimization subproblem (5.2). Also shown are finite element results for typically used operating parameters . . . . .	76
Tableau 6.1	Chemical compositions of substrate and filler metal (wt.%). Maximum acceptable limits are shown except when range is specified . . . . .	84
Tableau 6.2	Welding parameters for flux-cored arc-welding . . . . .	85
Tableau 6.3	Average* yield and tensile strengths, and strain-to-failure as a function of temperature and nominal strain-rate . . . . .	91
Tableau 6.4	Material parameters for the Johnson-Cook theory . . . . .	95
Tableau 7.1	Hammer peening parameters for a linear peening path [Taken from Luk-Cyr et al. (2016)] . . . . .	104
Tableau 7.2	Variables description . . . . .	108
Tableau 7.3	Design and objective variables for optimization of the sinusoidal trajectory . . . . .	110
Tableau 7.4	Number of evaluations until convergence . . . . .	112
Tableau 7.5	Selected solutions (blue circle in Fig. 7.12) which minimizes $-\Delta\bar{x}_3$ . Also shown are finite element results for typically used operating parameters	113

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Coupe transverse au cordon de soudure (Acier E309L) montrant les contraintes résiduelles longitudinales. Le métal de base est le CA6NM. En haut, la coupe a été faite immédiatement après le soudage. On voit clairement la concentration de contraintes de tension près de la surface. En bas, le même cordon a subi un traitement d'écrouissage par martelage . . . . .	2
Figure 1.2	Robot SCOMPI utilisé par Hydro-Québec lors de la réparation des aubes de turbines hydro-électriques. Le robot est capable d'effectuer toutes les étapes de la réparation, soit le gougeage, le soudage, le martelage et le polissage . . . . .	3
Figure 2.1	[Adaptée de Zhang et al. (2009)] Discrétisation et maillage par éléments finis d'un coeur . . . . .	7
Figure 2.2	Fonction Rastrigin non-convexe en deux dimensions. L'existence de plusieurs minimum locaux compliquent la recherche de la solution optimale . . . . .	8
Figure 2.3	Vue longitudinale du robot SCOMPI . . . . .	9
Figure 2.4	Vue transversale du robot SCOMPI. . . . .	9
Figure 2.5	Plaque d'acier 304L martelée en ligne droite selon des paramètres opérationnels typiques, puis découpée pour l'analyse des contraintes . . . . .	10
Figure 2.6	[Adaptée de Gariépy et al. (2011)] Méthode Almen pour quantifier le grenaillage. Le calcul de la courbe de saturation se fait en deux étapes : (a) le grenaillage d'un échantillon standard et la mesure subséquente de la déflexion et ; (b) La détermination de l'intensité Almen $a_h^s$ où doubler le temps de grenaillage augmenterait cette quantité de 10% . . . . .	13
Figure 2.7	Schéma de la structure d'optimisation d'un procédé . . . . .	14
Figure 2.8	Schéma d'un échantillonnage par Latin Hypercube. Le domaine des variables de conception est divisé en $M = 5$ régions égales. Seulement un échantillon est pris par rangée et colonne . . . . .	16
Figure 2.9	Transformation de l'espace paramétrique à l'espace fonctionnel . . . . .	21
Figure 2.10	Exemple d'un ensemble de solutions représenté par le front Pareto . . . . .	21
Figure 2.11	Séquence d'optimisation séquentielle du procédé [Adaptation de Bonte et al. (2008)] . . . . .	24
Figure 2.12	[Adaptée de Krempl (1979)] La sensibilité au taux de déformation lors d'essais de traction uniaxiale est illustrée . . . . .	31

Figure 2.13	[Adaptée de Byun et al. (2004)] La sensibilité à la température lors d'essais de traction uniaxiale est illustrée. . . . .	31
Figure 2.14	[Adaptée de Kang et al. (2002a)] L'effet de Bauschinger est illustré lors d'essais cycliques. Noter la contrainte à laquelle la plasticité débute lors du renversement du chargement . . . . .	31
Figure 3.1	Schéma de la séquence de travail pour l'implantation d'un outil d'optimisation du procédé de martelage et la modélisation du E309L. Les grandes étapes y sont illustrées . . . . .	32
Figure 4.1	Temperature ( $\vartheta$ ) dependence of the (a) shear modulus $\mu$ ; (b) bulk modulus $\kappa$ — a simple polynomial expression is fitted to the experimental data of Paquet et al. (2012) for stainless steel 304L using a least-square method; and (c) 0.2% offset yield at a fixed strain-rate $\dot{\epsilon} = 8.75 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ (Paquet et al., 2012). The fit of the calibrated model to the data is shown . . . . .	51
Figure 4.2	Experimental data of the stress-strain response of stainless steel 304L at different temperatures but fixed strain-rate $\dot{\epsilon} = 8.75 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ (Paquet et al., 2012). The fit of the model to the data is shown. The dynamic recovery term $\gamma = 175$ , the work-hardening parameter $K = 100 \text{ GPa}$ and exponent $n = 0.6$ are constant for all curves and given in Table 4.2. The $B_0$ coefficients are given in Table 4.3 . . . . .	52
Figure 4.3	Experimental data of the stress-strain response of stainless steel 304L at different strain-rates but fixed temperature $\vartheta = 293K$ . The fit of the model to the data is shown . . . . .	52
Figure 4.4	Experimental data of Paquet (2006) for the room temperature cyclic stress-strain response of stainless steel 304L at various strain amplitudes and strain-rates (cf. Table 4.5). The fit of the model with calibrated material parameters to the data is shown. Remark : The experimental data shown are sampled from the actual data for visualization . . . . .	53
Figure 4.5	Room temperature cyclic stress-strain response at nominal strain-rate $\dot{\epsilon} = 2 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ and strain amplitude (a) 0.5%; and (b) 0.8%. Remark : The experimental data shown are sampled from the actual data for visualization . . . . .	53
Figure 5.1	Symmetric finite element mesh and dimensions. (a) Overall view with the full hammer; (b) weld toe with dimensions. Orientation is shown on top-left . . . . .	64
Figure 5.2	True stress vs true strain curve for stainless steel 304L . . . . .	64

Figure 5.3	Schematic showing the hammer's geometry and movement (thick arrow) along the weld toe . . . . .	65
Figure 5.4	Typical longitudinal residual stress curve vs depth directly under the impact of the hammer. The peened face is at 0. Dashed lines indicate transition from tension to compression, and vice-versa . . . . .	66
Figure 5.5	Typical normalized longitudinal residual stress curve vs lateral 1 direction from the impact location. The curve is taken at a depth $y_3^{\text{compr}}$ from the surface. Dashed lines indicate distance after which $\sigma_3^{\text{compr}}$ has decayed to 80% of $\sigma_3^{\text{compr}}$ . . . . .	66
Figure 5.6	Schematics of the workflow in a sequential approximate optimization algorithm . . . . .	71
Figure 5.7	Plots of (a)-(e) selected Pareto optima in the six dimension objective space for subproblem (5.1); and (f) error convergence plot. . . . .	77
Figure 5.8	Plots of (a)-(e) selected Pareto optima in the six dimension objective space for subproblem (5.2); and (f) corresponding influence of normalized hammer spacing $\delta z_{\text{norm}}$ on objectives. High score indicates high influence. . . . .	78
Figure 5.9	Normalized BIC score for hammer geometry optimization subproblem (5.1). Highest score indicates most influential design variable on corresponding objective . . . . .	80
Figure 5.10	Normalized BIC score for hammer peening process optimization subproblem (5.2). Highest score indicates most influential design variable on corresponding objective . . . . .	80
Figure 6.1	Schematic of the deposition process of austenitic stainless steel E309L on a 316L substrate. (a) A layer is composed of individually-deposited weld beads oriented longitudinally to the substrate; (b) the process is repeated, layer by layer, until a 35 mm thick block of E309L is obtained	85
Figure 6.2	Optical micrograph (200x) after etching of as-welded E309L showing its microstructure in the (a) transverse direction; and (c) longitudinal direction . . . . .	86
Figure 6.3	Dimensions in mm and orientation of E309L samples for uniaxial tensile experiments. The samples are 4 mm thick and follow ASTM-E6-09 . . . . .	87
Figure 6.4	(a) Room temperature true stress-strain curves for four nominal strain-rate levels. The markers are uniformly distributed for visualization only. (b) Also shown is the influence of the four nominal strain-rate on true stress at different true strain levels . . . . .	89

Figure 6.5	Effect of nominal strain-rate on (a) 0.2% offset yield ( $\sigma_y$ ) and tensile strengths ( $\sigma_u$ ); and (b) strain to failure, extracted from the engineering stress-strain data. Error bars correspond to one standard deviation over the average of three samples per material orientation . . . . .	89
Figure 6.6	(a) True stress-strain curves at three temperatures. The markers are uniformly distributed for visualization only. (b) Also shown is the influence of temperature (three) on true stress at different true strain levels. Nominal strain-rate is $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ . . . . .	90
Figure 6.7	Effect of temperature on (a) 0.2% offset yield ( $\sigma_y$ ) and tensile strengths ( $\sigma_u$ ); and (b) strain to failure, extracted from the engineering stress-strain data. Error bars correspond to one standard deviation over the average of three samples per material orientation. Nominal strain-rate is $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ . . . . .	90
Figure 6.8	SEM micrographs of the fracture surface of the axial tension samples at various temperatures and strain-rates . . . . .	92
Figure 6.9	Fit of the Johnson-Cook constitutive theory to (a) room temperature true stress-strain curves for four nominal strain-rate levels; and (b) true stress-strain curves at three temperatures, but fixed strain-rate $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ . The experimental data shown is sampled from the actual data for visualization . . . . .	95
Figure 7.1	Finite element mesh and dimensions. (a) Overall view with orientation tryad; and (b) weld bead . . . . .	99
Figure 7.2	True stress vs true strain curve for stainless steel 304L . . . . .	100
Figure 7.3	Sinusoidal motion of the hammer peening tool. The longitudinal head-speed $v$ and impact frequency $f$ define the impact locations $z_i$ , while $A$ and $\omega$ determine $x_i$ through the sine equation. Impact locations are indicated by $\bullet$ , while objective variables are measured at locations indicated by $\circ$ . The dashed circles are examples of the impact area. The example shown is for $A = t/2$ . . . . .	101
Figure 7.4	Typical longitudinal residual stress curve vs depth at measurement location $z_i$ . The peened face is at 0. Dashed lines indicate transition from tension to compression, and vice-versa . . . . .	103
Figure 7.5	Typical normalized longitudinal residual stress curve vs transverse (1 direction) from measurement location $z_i$ . The curve is taken at a depth $y_3^{\text{compr}}$ from the surface. Dashed lines indicate distance after which $\sigma_3^{\text{compr}}$ has decayed to 80% of $\sigma_3^{\text{compr}}$ . $t$ is the width of the weld bead . . . . .	103

Figure 7.6	Effect of amplitude $A$ and number of cycles $N_c$ on normalized objective variables (monitors). The operating parameters used are given in Table 7.1 and fixed for all graphs. Data points at $A = 0$ or $N_c = 0$ are the optimized results for a linear trajectory taken from Luk-Cyr et al. (2016). An ordinate value of 1 indicates the best scenario. . . . .	105
Figure 7.7	Prescribing a set of incompatible design parameters $v, f$ and $N_c$ may not yield the desired sinusoidal trajectory. The prescribed path is obtained when $N_s \geq 1$ . . . . .	106
Figure 7.8	Typical surface maps for computing (a) peening uniformity; and corresponding (b) peening coverage. The latter lacks the necessary information for concluding on uniformity of the induced deformation. Approximate peening path is shown . . . . .	108
Figure 7.9	Normalized BIC score. Highest score indicates most influential design variable on corresponding objective. $\bar{y}_3^{\text{start}}$ does not vary for the design parameters considered . . . . .	109
Figure 7.10	Workflow of a sequential approximate optimization algorithm . . . .	111
Figure 7.11	Plot of the model error versus the number of SAO iterations . . . .	113
Figure 7.12	Plots of selected solutions in the seven dimension objective space . . .	114
Figure 7.13	Coverage $c_t$ and uniformity $u_t$ relationship plots with normalized stress-based objective variables. The qualitative trends are indicated by the keyed arrows. . . . .	117
Figure 8.1	Schéma d'un élément linéaire avec repère naturel . . . . .	139
Figure 9.1	Comparaison des valeurs expérimentales avec numériques. Une trajectoire linéaire avec une vitesse d'avance de 4 mm/s, une fréquence de frappe de 36 Hz et un angle d'attaque de 3.5° est utilisé . . . . .	143



## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

$\theta$	Angle d'attaque du marteau
BIC	Bayesian Information Criterion
$\sigma$	Contrainte
$\sigma_i^{\text{compr}}$	Contrainte résiduelle de compression maximale dans la direction $i$
$c_t$	Couverture de martelage
$\epsilon$	Déformation
$\epsilon^p$	Déformation plastique
$\gamma$	Déformation de cisaillement
$N_s$	Densité de la trajectoire sinusoidale
D	Diamètre du marteau
$\Delta y_i$	Étendue de la zone de compression en profondeur pour la contrainte $\sigma_i^{\text{compr}}$
$\Delta x_i$	Étendue de la zone de compression latérale pour la contrainte $\sigma_i^{\text{compr}}$
$f$	Fréquence d'impact du marteau
$\omega$	Fréquence de la trajectoire sinusoidale du marteau
$\omega_s$	Fréquence de Nyquist
$N_c$	Nombre de cycles de la trajectoire sinusoidale
$y_i^{\text{start}}$	Profondeur à laquelle la contrainte de compression dans la direction $i$ débute
SAO	Sequential Approximate Optimization
$\dot{\epsilon}$	Taux de déformation
$\dot{\epsilon}^p$	Taux de déformation plastique
$\hat{y}(\hat{x})$	Valeur estimée de la fonction objectif au point $\hat{x}$
$\hat{x}$	Variable de conception
$v$	Vitesse d'avance du marteau
$u_t$	Uniformité de martelage

**LISTE DES ANNEXES**

Annexe A	KRIGEAGE . . . . .	161
Annexe B	RÉSUMÉ POUR LA COMPRÉHENSION ET LA MODIFICATION DE LA STRUCTURE D'UN FICHIER INPUT DANS ABAQUS . . .	168

## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

### 1.1 Contexte

Le Québec est en position d'avant-garde mondiale en ce qui a trait à la production d'énergie renouvelable, notamment au niveau de sa production d'énergie hydro-électrique qui excède les 36 GW. Toutefois, au cours des dernières années, le vieillissement des installations du parc de production d'Hydro-Québec, combiné à une demande sans cesse accrue en énergie, a causé plusieurs cas de fissuration dans les aubes de turbines hydrauliques, composante critique de production hydro-électrique.

Ces événements prolongent indûment les arrêts de groupes turbines-alternateurs planifiés annuellement pour l'entretien. Dans les cas les plus graves, le groupe turbine-alternateur est forcé à l'arrêt afin d'entreprendre la réparation sans délai. Il en résulte une perte de production onéreuse pour l'entreprise et donc la province du Québec. La réparation d'une zone fissurée, par exemple dans un joint aube-couronne ou aube-ceinture, se fait en deux grandes étapes, soit le gougeage de la portion fissurée du joint, puis le dépôt de cordons de soudure dans la zone ainsi apprêtée par alternance des passes de soudure selon une séquence appropriée. Il est à noter que la nature du matériau d'apport est importante puisque la réparation en place du CA6NM et 410 NiMo nécessite un traitement post-soudage risqué à 600°C. C'est pour cette raison que les matériaux austénitiques ont un grand potentiel vu leur microstructure C.F.C.<sup>1</sup> contrairement aux aciers martensitiques. Le choix du métal d'apport pour la réparation des fissures sur les aubes de turbines hydro-électriques a déjà fait l'objet d'une analyse chez Hydro-Québec, Lanteigne et al. (2001).

Or, de nombreuses études ont démontré que cette procédure introduit des contraintes résiduelles positives dans les aubes de turbines, accélérant ainsi la détérioration subséquente de la vie en fatigue (Simoneau et al., 2009; Lévesque et al., 2013). Il est donc primordial pour Hydro-Québec de développer et de se munir d'outils numériques permettant de mieux comprendre les conséquences de telles réparations afin d'optimiser son approche pour réduire, voire éliminer les contraintes résiduelles de tension dans les aubes de turbines suite au soudage à travers un procédé de relaxation des contraintes. La Fig. 1.1 montre un profil de contraintes résiduelles typiques après la réparation d'une fissure par soudage.

---

1. Cubique à face centrée

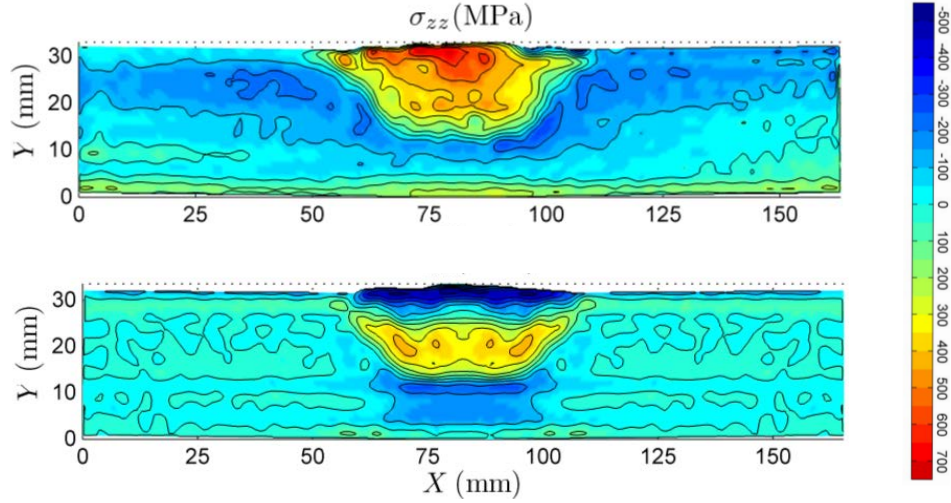


Figure 1.1 Coupe transverse au cordon de soudure (Acier E309L) montrant les contraintes résiduelles longitudinales. Le métal de base est le CA6NM. En haut, la coupe a été faite immédiatement après le soudage. On voit clairement la concentration de contraintes de tension près de la surface. En bas, le même cordon a subi un traitement d'écrouissage par martelage

## 1.2 Problématique

Présentement, plusieurs méthodes de relaxation des contraintes résiduelles de tension in situ sont utilisées en industrie (Kirkhope et al., 1999). Le chauffage par bobine d'induction par exemple permet un recuit localisé dans la zone affectée par la soudure, relaxant ainsi les contraintes de tension. Ce procédé est toutefois souvent difficile à utiliser du à la géométrie restreinte à l'endroit de fissuration ainsi que la nature complexe des phénomènes électromagnétiques en question. Une autre approche souvent empirique repose sur la stratégie de dépôt des cordons de soudures. On compense les contraintes résiduelles générées par le dépôt d'un cordon selon une orientation, par le dépôt d'un second cordon dans une orientation transverse. Encore une fois, cette approche est difficile à implanter et la répétabilité est absente de nature.

Une des approches les plus couramment utilisées à ce jour est le martelage du joint soudé, et fera l'objet de cette thèse. Le martelage consiste à “frapper” le cordon de soudure à l'aide d'un marteau de dimensions réduites et ce, à haute fréquence afin d'introduire des contraintes résiduelles de compression (négatives) bénéfiques pour la vie en fatigue. Malgré que ce procédé est présentement en utilisation chez Hydro-Québec depuis 1991 à l'aide du robot SCOMPI, Fig. 1.2, les paramètres d'utilisation sont basés sur l'expérience des “essais et erreurs” et sont loin d'être optimaux.

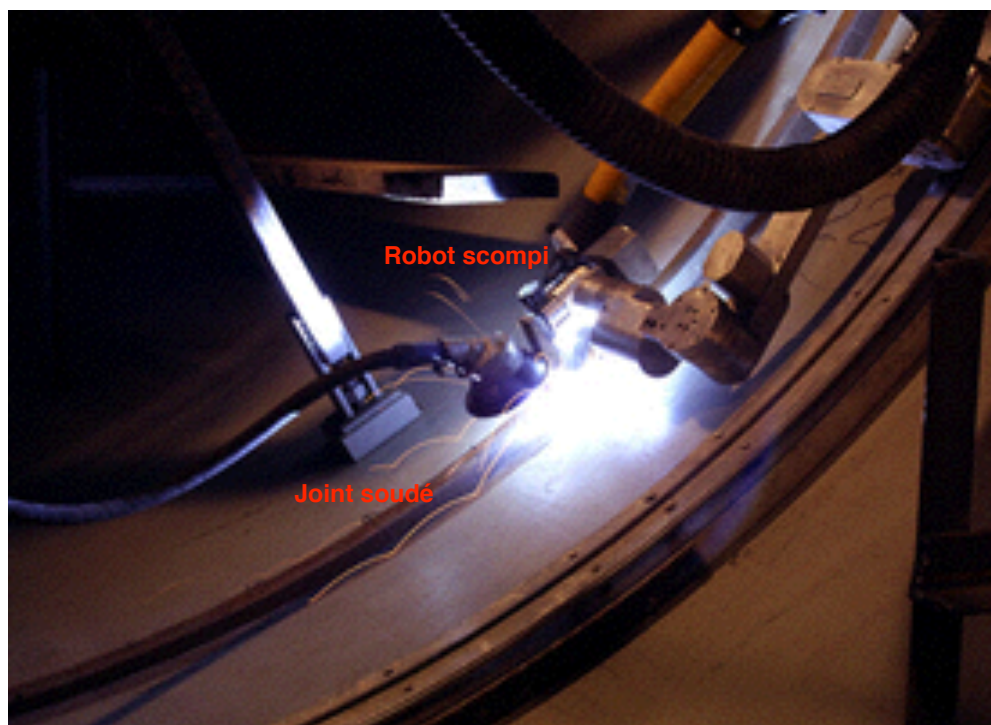


Figure 1.2 Robot SCOMPI utilisé par Hydro-Québec lors de la réparation des aubes de turbines hydro-électriques. Le robot est capable d'effectuer toutes les étapes de la réparation, soit le gougeage, le soudage, le martelage et le polissage

L'absence d'outil numérique pour la détermination des paramètres de martelage empêche l'utilisation de cette technologie à son plein potentiel. Conséquemment, l'optimisation numérique du martelage est d'importance capitale au développement et à l'entretien du parc de production d'Hydro-Québec puisqu'il lui permettra d'améliorer la durée de vie des réparations et de diminuer la fréquence de ces interventions coûteuses. De plus, cela pourrait servir comme outil d'avant-garde là où la nécessité d'éliminer des contraintes résiduelles de tension est importante, tel le domaine de l'aéronautique et de la fabrication en général.

### 1.3 Opportunité et objectifs de la thèse

Une opportunité se présente puisque l'absence d'outils numériques pour la détermination des paramètres de martelage est problématique. Un tel outil d'optimisation permettrait une meilleure utilisation du martelage non seulement pour l'entretien du parc de production d'Hydro-Québec, mais pour tout autre domaine tel l'aérospatial, ou là où la nécessité d'éliminer des contraintes résiduelles de tension est importante. L'objectif est donc de développer un outil numérique pour l'optimisation des paramètres opérationnels du martelage industriel.

Ceci requerra d'une part son implantation dans un logiciel par éléments finis, et d'autre part, une caractérisation du matériau à marteler. Cette combinaison, soit l'optimisation et la modélisation, servira comme stratégie d'optimisation essentielle pour Hydro-Québec dans son objectif d'améliorer la durée de vie de ses réparations de fissures par soudage combinée au martelage.

En somme, afin de répondre à cet objectif, les objectifs spécifiques suivants sont :

- (1) Implanter le procédé de martelage dans un logiciel par éléments finis et définir des quantités mesurables pour suivre le progrès de martelage.
- (2) Obtenir les propriétés mécaniques du matériau à marteler (E309L) par l'entremise d'essais expérimentaux. Par la suite, définir le modèle constitutif adéquat afin de représenter le comportement dudit matériau.
- (3) Développer une structure d'optimisation numérique afin d'obtenir les paramètres de martelage optimaux.

### 1.4 Organisation de la thèse

Cette thèse est divisé en neuf (9) chapitres, le premier étant ce chapitre d'introduction.

Le deuxième chapitre contient une revue de la littérature détaillée. Cette revue est divisée en trois thèmes. Le premier discute du procédé de martelage et des analyses expérimentales

et numériques effectuées. La second thème met l’emphase sur les méthodes d’optimisation existantes dans le cadre des applications industrielles. Le flux de travail pour une telle méthodologie est détaillé. Le troisième thème discute des propriétés mécaniques de l’acier à marteler, mais aussi de la modélisation théorique de son comportement.

Le troisième chapitre présente la démarche scientifique et introduit les quatre articles qui seront présentés dans ce document. Une description des objectifs et des conclusions et y est présentée. Les quatrième, cinquième, sixième et septième chapitres présentent les articles publiés et en révisions. Chacun de ces articles prend sa place dans cette thèse comme suit :

- (1) Article 1 : Dans cet article, il est présenté un nouveau modèle théorique pour la modélisation du comportement d’un acier austénitique soumis à des conditions de chargements similaires à ceux du martelage et soudage. Une validation expérimentale est effectuée.
- (2) Article 2 : Dans cet article, il est présenté une méthodologie d’optimisation des paramètres de martelage en utilisant l’algorithme SAO combiné à une implantation par éléments finis du martelage. Des nouvelles fonctions objectifs sont introduites ( $\sigma_i^{\text{compr}}$ ,  $\Delta y_i$  et  $\Delta x_i$ )<sup>2</sup>, un espace de solutions Pareto optimales est obtenu et les valeurs optimales de vitesse, de fréquence d’impact et de la géométrie du marteau sont identifiées.
- (3) Article 3 : Dans cet article, il est présenté une analyse expérimentale détaillée des propriétés mécaniques de l’acier austénitique inoxydable E309L. Par la suite, un modèle constitutif est choisi basé sur ces résultats expérimentaux.
- (4) Article 4 : Dans cet article, il est présenté une discussion complémentaire de l’algorithme d’optimisation. Celui-ci est maintenant appliqué à la trajectoire sinusoidale du martelage. Une discussion est présentée concernant la couverture du martelage et de la possibilité d’introduire une nouvelle quantité, l’uniformité de martelage - tous deux des paramètres qui pourraient être utilisés comme variable objectif dans l’optimisation.

Dans le huitième chapitre, nous faisons une introduction aux concepts nécessaires à l’implantation de la théorie constitutive dans le logiciel Abaqus. Ces concepts ont été utilisés tout au long de cette thèse ainsi que dans les articles. À titre d’exemple, une théorie thermo-plastique, théorie qui est implantée dans le code d’éléments finis d’Hydro-Québec, est présentée.

Nous concluons finalement au chapitre 10 en identifiant les contributions originales de ce travail ainsi que l’ouverture et les perspectives qui en découlent.

---

2. Voir la liste des sigles et abréviations

## CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

Dans ce chapitre, nous faisons un sommaire des travaux pertinents actuellement disponibles dans la littérature ainsi que leurs acquis ou manquements.

Une brève discussion des concepts d'éléments finis et d'optimisation est donnée aux Sect. 2.1 et 2.2. À la Sect. 2.3, on discute du martelage expérimental et de son implantation numérique. Une revue des étapes nécessaires à l'optimisation des procédés est présentée à la Sect. 2.4. On y discute de la structure d'un problème d'optimisation et de ses ingrédients, soit :

- (1) le plan d'expérience ;
- (2) le choix des fonctions objectifs ;
- (3) la métamodélisation ;
- (4) la recherche optimale ;
- (5) la validation de la solution ; et
- (6) le choix des variables de conception.

Finalement, à la Sect. 2.5, un sommaire des modèles constitutifs disponibles pour la modélisation du matériau martelé est donné.

### 2.1 Éléments finis

La procédure pour solutionner des problèmes structuraux en ingénierie par la méthode des éléments finis a été proposée pour la première fois dans les années 1940 par Hrennikoff (1941), et depuis discutée en détail par dans de nombreux ouvrages, notamment ceux de Hinton and Irons (1968); Bathe (2007); Zienkiewicz et al. (2013). Depuis, cette méthode s'est popularisée et est maintenant devenue un outil de choix pour la résolution de problèmes de diverses natures comme ceux impliquant l'électromagnétisme, la mécanique des fluides, les batteries au lithium, le soudage, etc.

La méthode des éléments finis consiste à discrétiser un domaine continu en une série de sous-domaines où, pour un problème structurel par exemple, les équations d'équilibres des forces et des moments seront satisfaites. Un exemple est donné à la Fig. 2.1 où un coeur a été discrétisé pour modéliser l'écoulement de sang. Pour un procédé de relaxation des contraintes comme le martelage, la solution obtenue sera celle admissible étant donné l'historique de martelage, le comportement régissant le matériau, et les conditions aux frontières. Cette solution nous permet par la suite d'extraire des quantités intéressantes comme les contraintes résiduelles et les déformations, sans devoir passer par une procédure expérimentale coûteuse.



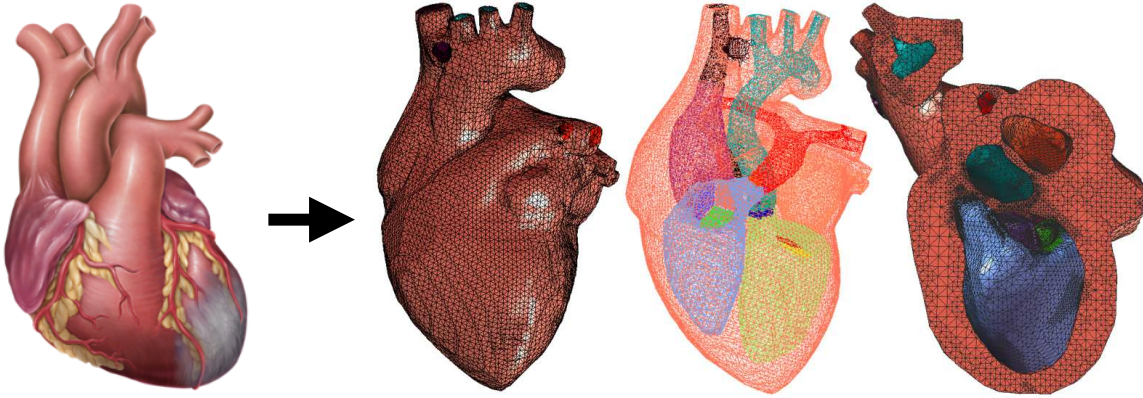


Figure 2.1 [Adaptée de Zhang et al. (2009)] Discretisation et maillage par éléments finis d'un coeur

Toutefois, il est important de mentionner que les simulations par éléments finis sont en général coûteuses en temps de calculs, ainsi qu'en implantation et en post-traitement par des spécialistes. Cela peut devenir problématique, particulièrement lorsque le budget de calcul est restreint et lorsque la géométrie est complexe et nécessite une énorme quantité de sous-domaines, ou d'éléments.

## 2.2 Optimisation

Afin d'obtenir les paramètres de martelage optimaux, nous ferons appel aux notions d'optimisation mathématique. Nous verrons plus tard comment il est possible d'accomplir ce but, mais premièrement faisons un bref rappel de ce qu'est l'optimisation.

En optimisation, l'objectif est de minimiser<sup>1</sup> une fonction mathématique en variant systématiquement ses variables indépendantes. La fonction à minimiser, dénotée *fonction objectif* peut être fonction d'une ou de plusieurs variables indépendantes, ou *variables de d'optimisation*. De manière générale, cette fonction objectif ainsi que ses variables de conception peuvent être assujetties à des contraintes de conception limitant le domaine de leur valeurs possibles.

Dans les cas les plus simples, la recherche de la meilleure solution, ou de la *solution optimale*, peut se faire de manière systématique et directe. Par contre, dans le cas de fonctions plus complexes, cette solution optimale peut être difficile à obtenir étant donnée la forme non convexe ou non lisse de la fonction à minimiser. La Fig. 2.2 illustre la fameuse fonction de

---

1. Il est toujours possible de transformer un problème de maximisation en minimisant l'opposée de la fonction.

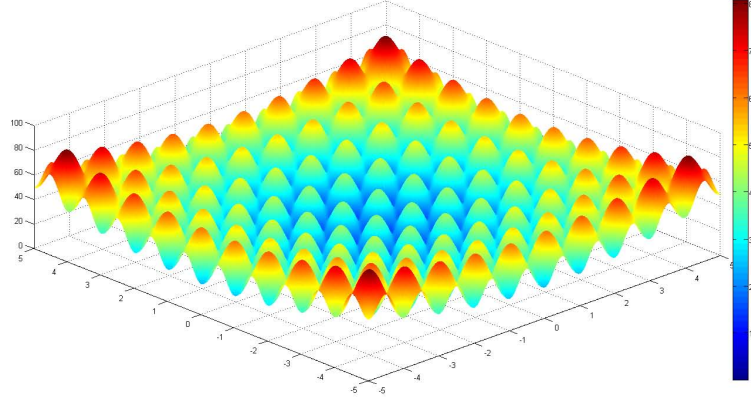


Figure 2.2 Fonction Rastrigin non-convexe en deux dimensions. L'existence de plusieurs minimum locaux compliquent la recherche de la solution optimale

Rastrigin utilisée pour l'évaluation des performances d'un algorithme d'optimisation. Dans un tel cas, l'utilisation des méthodes classiques s'avère souvent insuffisante, car la fonction présente plusieurs minimums locaux où le gradient est nul.

## 2.3 Implantation numérique du martelage

Nous discutons ci-bas des études expérimentales et numériques du martelage.

### 2.3.1 Analyse expérimentale du martelage

Le martelage est un procédé mécanique qui consiste à déformer plastiquement le matériau en surface d'une structure métallique, introduisant ainsi des contraintes résiduelles de compression sous cette surface. Or, cette procédure est bien connue dans la communauté scientifique pour augmenter la vie en fatigue de la région martelée et prévenir l'amorçage de fissures (Curtat, 2016; Torres and Voorwald, 2002). Dans le cadre de cette thèse, le martelage est appliqué à la suite d'un dépôt de soudage, celui-ci introduisant des contraintes résiduelles de tension sous et en surface, (Curtat, 2016). Il est donc important que la profondeur sous la surface affectée par ce processus<sup>2</sup> soit suffisamment grande afin de déplacer et de relaxer ces contraintes résiduelles de tension.

L'application du martelage peut se faire à l'aide d'un marteau pneumatique par un utilisateur. Cette approche est toutefois limitée à des petites régions et la répétabilité est faible. En industrie, on préfère plutôt le martelage robotisé où l'utilisateur n'a qu'à spécifier une série

---

2. Pour le procédé étudié dans cette thèse, cette quantité est dénotée la *profondeur de martelage*

de paramètres de martelage à un outil automatisé. Une telle approche est présentement utilisée par Hydro-Québec à travers le robot SCOMPI — ce robot est d'ailleurs équipé pour effectuer toutes les étapes nécessaires à la réparation des fissures, dont le gougeage, le soudage et le martelage (Thibault et al., 2000, 2005; Fihey et al., 2005; Simoneau et al., 2009). Pour l'opération de martelage, le robot SCOMPI est équipé d'un marteau à embout en acier semi-sphérique destiné à frapper successivement la surface à déformer. Cette frappe est contrôlée avec une force d'impact déterminée par la pression manométrique fournie au robot et ce, à une fréquence de 36Hz. Cette dernière peut être modifiée en fonction du modèle du marteau. Celui-ci se déplace à une vitesse prédéfinie par l'utilisateur selon la direction de martelage. Le montage du robot SCOMPI est illustré aux Figs. 2.3-2.4.

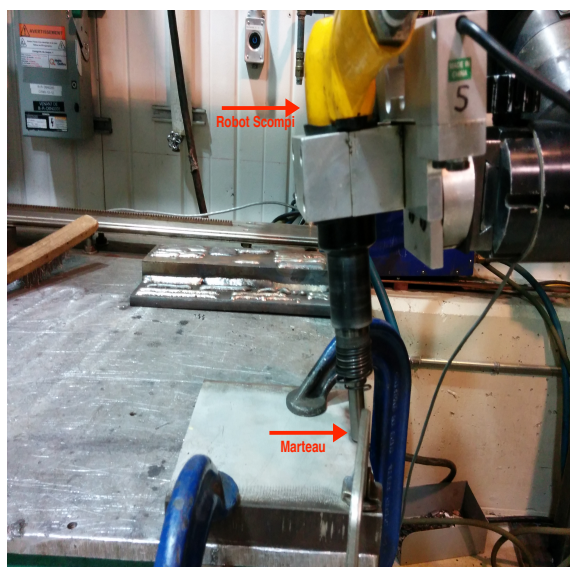


Figure 2.3 Vue longitudinale du robot SCOMPI

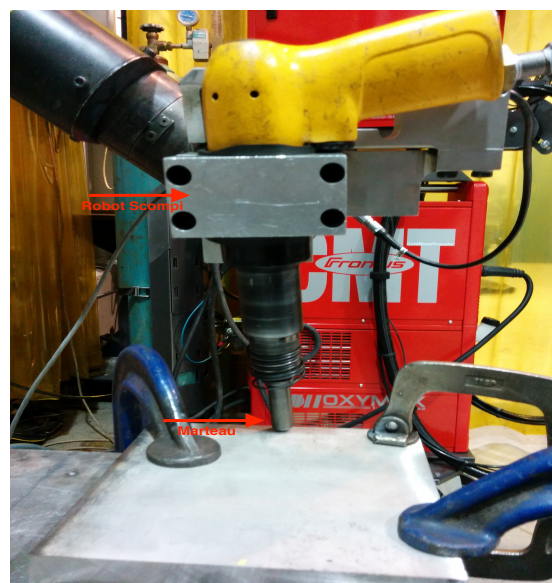


Figure 2.4 Vue transversale du robot SCOMPI.

Le procédé de martelage semble à priori simple étant donné le nombre limité de variables de conception impliquées. Toutefois, la pratique courante du choix des paramètres opérationnels repose majoritairement sur l'expérience de l'utilisateur et une connaissance empirique suite à des essais et erreurs. Dans Morin et al. (2001) par exemple, les paramètres de martelage ont été déterminés en recherchant empiriquement la manière la plus rapide de marteler complètement une région. Ils ont conclu qu'un martelage avec oscillations était plus rapide que celui en ligne droite. Une plaque martelée en ligne droite est illustrée à la Fig. 2.5. En utilisant les résultats de ce rapport, Laroche et al. (2002) ont procédé à la réparation des aubes de turbines de la centrale de Beauharnois où le martelage a été utilisé à la suite du dépôt d'un

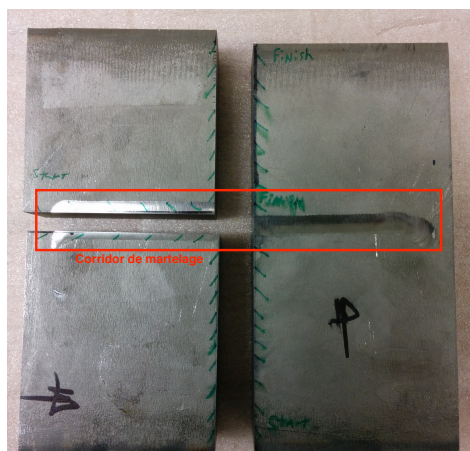


Figure 2.5 Plaque d'acier 304L martelée en ligne droite selon des paramètres opérationnels typiques, puis découpée pour l'analyse des contraintes

cordon de soudure. Cette méthode d'ajustement des paramètres est risquée, puisqu'aucune corrélation n'est vérifiée entre la couverture maximale d'un martelage et l'état des contraintes résiduelles sous la région martelée. Encore plus inquiétant est qu'il n'est pas encore possible de déterminer les effets exacts de ce martelage sur la soudure. Simoneau (2004) propose quant à lui de déterminer la relation entre l'amplitude de distorsion d'une plaque d'acier suite au martelage en fonction de la nature du matériau et du nombre de passes de martelage<sup>3</sup> seulement. Selon lui, un martelage idéal est celui qui génère une amplitude de distorsion *a posteriori* la plus grande que possible. Toutefois, l'étude est limitée puisque de nombreux paramètres sont fixés au cours de cette analyse et leurs effets ne sont pas observés. De plus, avec cette approche, il n'est toujours pas possible de conclure quant à la distribution des contraintes résiduelles. D'autres essais expérimentaux ont aussi été effectués par Lessard (2005) où une configuration à plusieurs marteaux a été étudiée. Ici, l'approche de Morin et al. (2001) a été reprise, où l'optimisation du procédé de martelage est basée sur la rapidité à laquelle il est possible de marteler une région prédéfinie. Davantage de détails sur le procédé sont disponibles dans Curtat (2016).

Jusqu'à présent, les travaux susmentionnés reflètent davantage une calibration d'un procédé plutôt que d'une optimisation.

### 2.3.2 Modélisation du martelage

D'un point de vue numérique, Lanteigne (2004) a analysé la distribution des contraintes résiduelles suite au martelage à travers une simulation numérique par éléments finis. Pour

3. Une passe de martelage représente une séquence où la surface entière en question est martelée.

modéliser le procédé de martelage, des conditions de déplacements ont été spécifiées aux frontières afin de simuler l’empreinte statique laissée par le martelage et tous les effets inertiels ont été négligés. Par contre, une analyse paramétrique dans le but de déterminer l’influence des paramètres de martelage sur les contraintes résiduelles n’a pas été faite. Dans Liu et al. (2009), l’effet de la magnitude d’un impact de martelage sur la vie en fatigue d’un aluminium a été investigué expérimentalement dans un premier temps, puis numériquement afin d’expliquer l’augmentation de la vie en fatigue après martelage. Dans leurs simulations numériques, la vitesse du marteau tout juste avant l’impact est prescrite dans le logiciel Abaqus/Explicit. Ils ont conclu qu’il y avait une forte corrélation entre l’augmentation de la vie en fatigue et la magnitude des contraintes résiduelles obtenues numériquement. De manière similaire, Baptista et al. (2011) ont effectué des simulations numériques du martelage dans Abaqus/Explicit afin d’obtenir numériquement les contraintes résiduelles. Celles-ci ont par la suite été comparées aux contraintes résiduelles obtenues expérimentalement par diffraction à rayons X. Toutefois, ils indiquent qu’une simulation dynamique (Abaqus/Explicit) n’est peut-être pas la bonne approche puisque la simulation n’est pas déterministe ; la réponse peut varier lorsque certaines conditions numériques (e.g. le pas de temps) sont modifiées, ce qui peut rendre les résultats imprévisibles.

Malgré qu’il est bien connu que le martelage à un potentiel d’amélioration de la vie en fatigue plus élevée que le grenaillage (Kirkhope et al., 1999), les implantations numériques actuelles du martelage partagent certaines similitudes avec celles du grenaillage (Miao et al., 2010a,b, 2011). Par exemple, la grande majorité des implantations numériques du martelage se font à l’aide d’un logiciel dit *explicite* (Abaqus/Standard, 2013), tel que Abaqus/Explicit. Or, de tels solveurs sont généralement utilisés pour la résolution de problèmes dynamiques nécessitant des petits pas de temps afin d’assurer la convergence. De plus, lorsque des grandes non-linéarités sont en jeu pour des problèmes structuraux, la solution est souvent oscillante due aux effets inertiels. Afin de pallier à ce problème, plusieurs auteurs choisissent d’*amoindrir* ces effets inertiels en introduisant dans leurs simulations par éléments finis des *éléments visqueux* et/ou *infinis* permettant d’*éliminer* les ondes élastiques (Meguid et al., 1999; Guagliano, 2001; Kang et al., 2009). Toutefois, comme l’indique Gariépy et al. (2011), le choix, la calibration et la distribution de ces éléments s’avère être une tâche non triviale étant donné que ceux-ci affectent généralement la solution du problème. Comme alternative, plusieurs utilisent une solution à l’aide d’un logiciel *implicite* (e.g. Abaqus/Standard) étant donné que les effets inertiels sont négligeables<sup>4</sup>. En effet, les travaux de Choi and Park (1999) ont permis d’établir qu’il existe un ensemble de chargements statiques équivalents qui génère un champ

---

4. En pratique, le martelage est utilisé sur de grandes structures où les effets inertiels peuvent bel et bien être négligés.

de déplacements identique à celui généré par le chargement dynamique initial. C’est d’ailleurs cette idée qui est reflétée dans Lanteigne (2004), où ils utilisent un solveur implicite afin de simuler le martelage. Pour ses conditions aux frontières, au lieu de spécifier une vitesse ou une force d’impact du marteau, l’empreinte statique expérimentalement mesurée laissée par le marteau a été choisie. Cela résulte en une solution beaucoup plus rapide et stable. De manière similaire, Frija et al. (2006) modélise l’impact par une surface rigide se déplaçant contre la surface à marteler. Cette *indentation* est obtenue en spécifiant une profondeur d’indentation. Leurs résultats numériques concordent avec ceux mesurés à l’aide de la méthode de diffraction par rayons X. Toutefois, une analyse paramétrique des paramètres de martelage n’a pas été faite. En somme, malgré que plusieurs travaux valident l’utilisation des simulations numériques pour la prédiction des contraintes induites par le martelage, aucun ne semble proposer de méthodologie pour l’optimisation des paramètres.

Finalement, nous tenons à mentionner qu’en pratique, il est nécessaire de définir des quantités observables et calculables nous permettant d’évaluer la progression et la qualité d’un martelage. Ces quantités pourront par la suite faire l’objet d’une étude d’optimisation afin de déterminer les paramètres opérationnels idéaux, comme discuté à la section précédente. Dans le cas du grenaillage, plusieurs quantités ont déjà été définies comme *l’intensité Almen*, voir Fig. 2.6. Cette quantité est obtenue en calculant la courbe de saturation. Celle-ci est créée en mesurant la déflexion d’un échantillon grenaillé selon les spécifications désirées en fonction du temps de grenaillage écoulé. Le point de saturation est déterminé en calculant le temps  $T$  de grenaillage pour lequel la déflexion augmenterait de 10% si l’on doublait le temps de grenaillage,  $2T$ . La déflexion correspondant à ce temps  $T$  est définie comme *l’intensité Almen*. Plusieurs auteurs cherchent à optimiser de telles quantités en fonction des paramètres opérationnels pour le grenaillage (Gariépy et al., 2011; Mann et al., 2015). Toutefois, après une revue de littérature, aucune quantité similaire n’a été proposée pour le martelage.

## 2.4 Optimisation des procédés

Les simulations par éléments finis combinées à l’optimisation jouent un rôle grandissant en ingénierie des procédés. Ceux-ci permettent d’évaluer des solutions, qui autrement prendraient plusieurs mois à tester, en quelques heures.

Dans cette Section, nous présentons la structure générale de cette optimisation, telle que représentée à la Fig. 2.11, et en discutons les principales composantes.



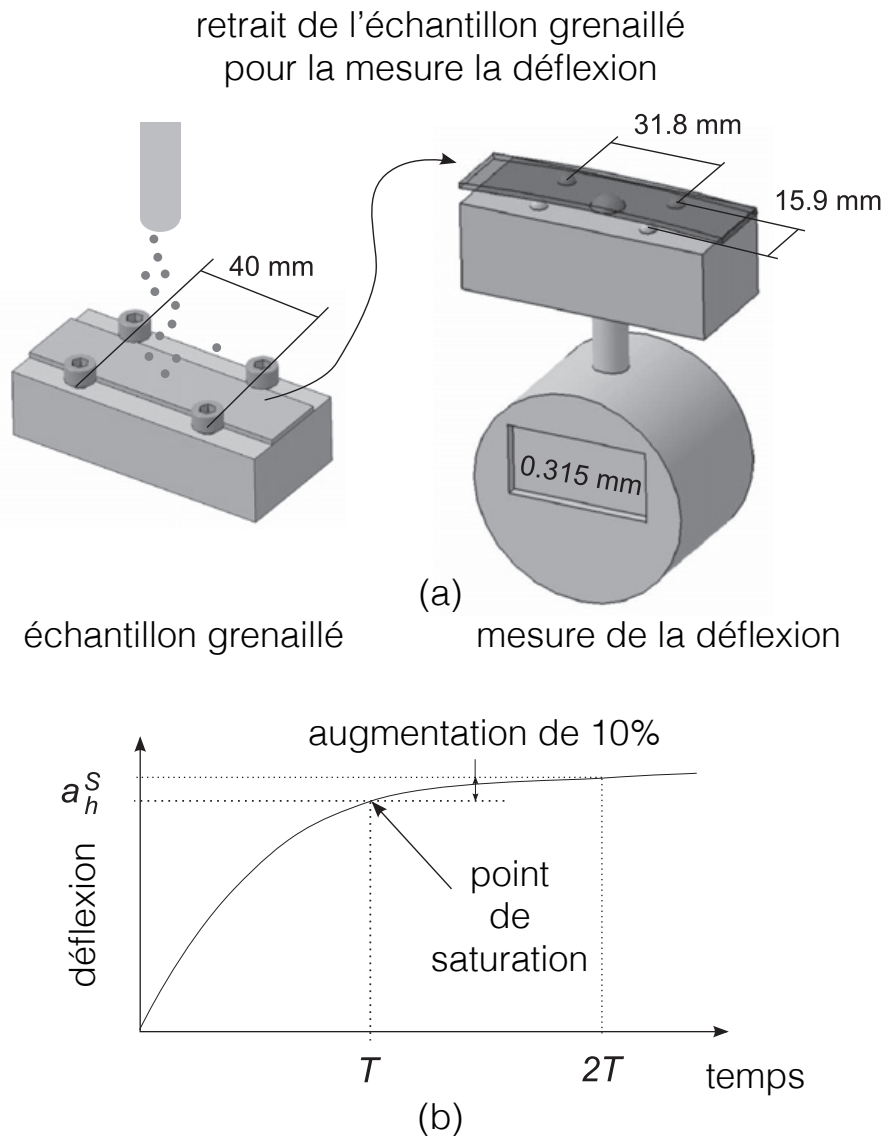


Figure 2.6 [Adaptée de Gariépy et al. (2011)] Méthode Almen pour quantifier le grenaillage. Le calcul de la courbe de saturation se fait en deux étapes : (a) le grenaillage d'un échantillon standard et la mesure subséquente de la déflexion et ; (b) La détermination de l'intensité Almen  $a_h^s$  où doubler le temps de grenaillage augmenterait cette quantité de 10%

#### 2.4.1 Structure du problème

La structure générale d'un problème d'optimisation combinée aux éléments finis est illustrée à la Fig. 2.7. Certaines quantités, communément appelées *variables de conception*, sont choisies comme entrées dans une séquence de simulations par éléments finis. Ces variables de conception peuvent être accompagnées ou non de contraintes opérationnelles, comme le serait la géométrie d'un outil de formage par exemple. Une fois la séquence de simulations

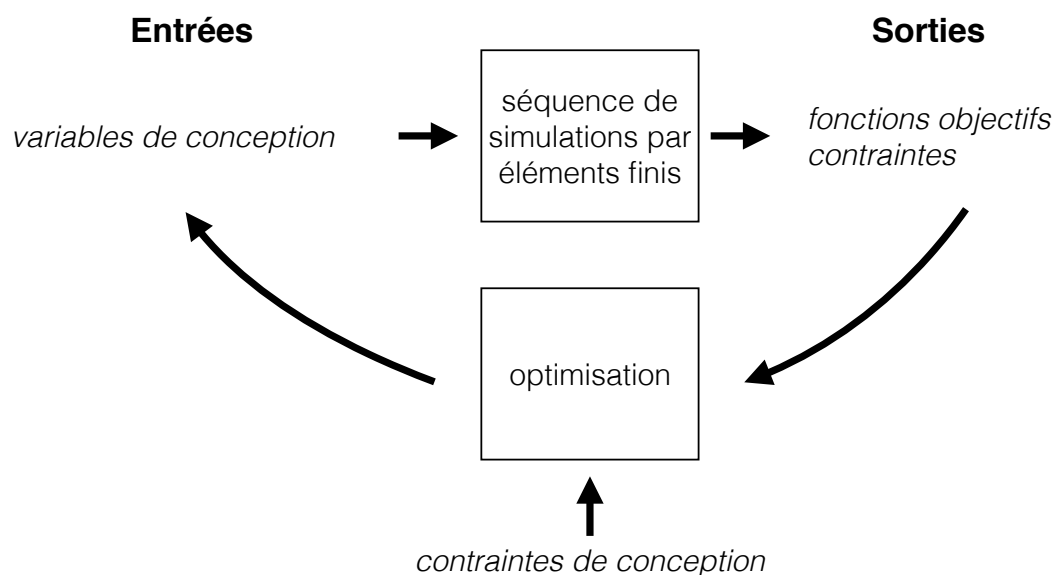


Figure 2.7 Schéma de la structure d'optimisation d'un procédé

par éléments finis terminée, l'utilisateur obtient en sortie une ou plusieurs réponses que l'on dénote *fonctions objectifs*. Or, dans un contexte d'optimisation des procédés, le but est de minimiser<sup>5</sup> la fonction objectif sujette à des contraintes de conception<sup>6</sup>, un algorithme d'optimisation est nécessaire afin d'*optimiser* les variables de conception.

Dans ce qui suit, nous allons discuter plus en détail du choix des variables de conception, des fonctions objectifs ainsi que de l'algorithme d'optimisation.

### 2.4.2 Plan d'expérience

Lors de la sélection des variables de conception, il y a trois aspects à prendre en considération :

- **Leur importance :** Dans un procédé comme l'excavation à ciel ouvert de minerais par exemple, le nombre de variables de conception peut atteindre plus d'une trentaine, (Antics et al., 2011). Afin de minimiser les coûts additionnels de calcul engendrés par un nombre élevé de variables de conception, il est courant d'effectuer a priori un *filtrage*<sup>7</sup> statistique des variables de conception basé sur leur effet sur les fonctions objectifs. Le sujet est discuté plus bas.

5. Un problème de maximisation peut facilement être transformé en problème de minimisation à travers la relation :  $\max(f) = \min(-f)$ , où  $f$  est la fonction objectif.

6. Un exemple de contrainte de conception est le volume final d'une pièce forgée.

7. Étude de sensibilité



- **Leur plage de valeurs :** D'un point de vue pratique, on s'attend naturellement à avoir des bornes inférieures et supérieures pour les variables de conception. Cette plage de valeurs possibles est généralement définie par des contraintes opérationnelles, budgétaires, ou tout simplement par expérience de l'utilisateur.
- **Les combinaisons possibles :** Fort probablement la considération la plus importante d'un point de vue efficacité de l'optimisation combinée aux simulations par éléments finis est la pratique de choisir les combinaisons de variables de conception qui porte le nom de *plan d'expérience*. Ces plans d'expériences suggèrent une approche statistique et contrôlée à l'acquisition d'information (i.e. évaluation des fonctions objectifs) afin d'assurer un nombre d'essais (i.e. simulations par éléments finis) le plus faible que possible tout en assurant une couverture acceptable de l'espace des variables.

Plusieurs auteurs se sont déjà penchés sur la notion de plan d'expérience (Giunta et al., 2003). Une approche typique utilisée dans les expériences déterministes<sup>8</sup> est l'utilisation d'un plan uniforme<sup>9</sup>, (Santner et al., 2003). L'approche dite *Latin Hypercube Sampling*, initialement proposée par (Mackay et al., 2000), est un plan uniforme où l'on vient généraliser le concept du carré Latin<sup>10</sup> à plusieurs dimensions. Plus concrètement, si l'on a  $N$  variables, on doit premièrement diviser le domaine d'intérêt de chaque variable en  $M$  intervalles. Par la suite, on vient choisir aléatoirement  $M$  combinaisons de façon à satisfaire la condition du carré Latin, c'est-à-dire avoir un seul échantillon par rangée et colonne, voir la Fig. 2.8. Un des avantages de cette méthode est que le nombre d'échantillons  $M$  est invariant du nombre de variables de conception.

Toutefois, telle quelle, cette méthode n'assure pas une répartition optimale des échantillons dans l'espace. Une amélioration apportée par (Johnson et al., 1990) suggère l'addition d'un critère *minimax* et *maximin* afin d'optimiser la distance minimale entre n'importe quels points du plan d'expérience et ainsi éviter un amas localisé d'échantillons. Cette amélioration à la méthode originale porte d'ailleurs le nom de *Optimal Latin Hypercube*, (Morris and Mitchell, 1995; Stein, 1987).

### 2.4.3 Choix des fonctions objectifs

Une difficulté récurrente dans la majorité des problèmes d'optimisation en conception est l'absence de relation mathématique entre les fonctions objectifs et les contraintes que l'on

---

8. Une expérience déterministe est une expérience où l'évaluation de la fonction objectif demeure identique pour une combinaison de variables de conception donnée. C'est le cas pour une simulation par éléments finis.

9. Dans la littérature, on y fait référence par *Space Filling Design*.

10. Dans le cas à deux dimensions (i.e. deux variables de conception), il n'y a qu'un échantillon par ligne et colonne.

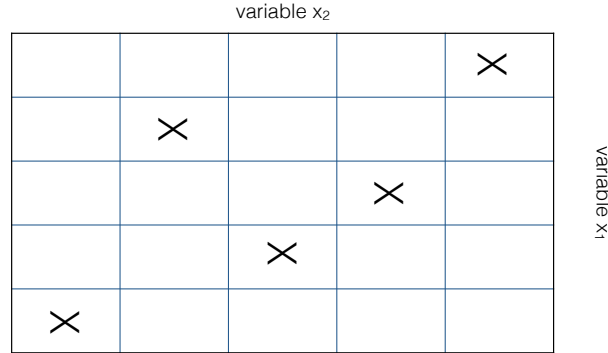


Figure 2.8 Schéma d'un échantillonnage par Latin Hypercube. Le domaine des variables de conception est divisé en  $M = 5$  régions égales. Seulement un échantillon est pris par rangée et colonne

désire minimiser et les variables de conception. De fait, ces fonctions objectifs sont plutôt des quantités que l'on observe *a posteriori*, c'est-à-dire une fois les simulations par éléments finis terminées. Le choix de ces fonctions objectifs dépend essentiellement de la nature du procédé et de l'expérience de l'utilisateur avec celui-ci. Dans Ayed et al. (2005) par exemple, plusieurs fonctions objectifs ont été utilisées, dont des scalaires de qualité et d'endommagement, afin d'optimiser le processus d'estampage. Afin de minimiser/maximiser ces fonctions objectifs, la force d'estampage a été choisie comme variable de conception.

#### 2.4.4 Métamodélisation

La modélisation d'un procédé par éléments finis s'avère une solution idéale lorsqu'on veut résoudre des problèmes d'ingénieries à grande échelle. Toutefois, ces simulations peuvent prendre plusieurs heures, voir même plusieurs jours lorsque plusieurs degrés de liberté sont en jeu, et ce, pour une seule évaluation des fonctions objectifs. De plus, d'un point de vue optimisation, cette simulation par élément finis est considérée comme étant une *boîte noire*, c'est-à-dire que l'utilisateur n'a accès qu'aux valeurs des fonctions objectifs, mais aucune information concernant ses dérivées. Cette limitation empêche l'utilisation de méthodes classiques d'optimisation pour lesquelles le gradient est essentiel. Afin de résoudre ce problème, trois grandes familles de méthodes existent, soit les méthodes dites *heuristiques*, les méthodes *statistiques* et les méthodes *sans dérivées*.

Concernant les méthodes heuristiques, leur inconvénient majeur est le coût élevé en terme du nombre d'évaluations des fonctions objectifs nécessaires à l'obtention d'une solution (Stadler, 1979; Steuer, 1986; Stadler, 1988; Deb, 2001; Weistroffer et al., 2005; Conn et al., 2009;

Matlab, 2015a). Dans le cas de simulations par éléments finis, cette approche est difficilement applicable tel quel. Une discussion plus approfondie est donnée plus bas. Les méthodes sans dérivées, quant à elles, sont d'un intérêt grandissant dans la communauté mathématique et sont particulièrement utiles lorsque le budget d'évaluations des fonctions objectifs est limité (Conn et al., 2009). Le domaine est toutefois très spécialisé, et nous n'irons pas plus en détail.

Dans le cadre de l'optimisation des procédés, l'approche prédominante dans la littérature est une approche hybride combinant à la fois certains aspects des méthodes statistiques et heuristiques. On parle alors d'*optimisation approximative par métamodélisation*.<sup>11</sup>

De façon générale, cette dénomination implique l'ajout d'une étape additionnelle de *métamodélisation* à la Fig. 2.7, entre l'obtention des fonctions objectifs et de l'optimisation. Une fois le métamodèle créé, on lance un algorithme d'optimisation heuristique sur celui-ci pour la recherche d'une solution optimale. Ce métamodèle est créé à partir d'une approximation ou d'une interpolation de l'espace vectoriel généré par les variables de conception et des fonctions objectifs, et permet l'estimation des fonctions objectifs pour des combinaisons de variables de conception non incluse dans le plan d'expérience. De cette manière, il est possible d'explorer les résultats de certaines combinaisons de variables de conception sans devoir lancer une séquence de simulations par éléments finis.<sup>12</sup>

Il va sans dire que la qualité du métamodèle choisi affectera directement le nombre de simulations par éléments finis nécessaires pour la convergence vers une solution optimale. Un métamodèle sera insatisfaisant s'il est incapable de prédire les fonctions objectifs aux endroits non inclus dans le plan d'expérience avec une précision suffisante. Dans la littérature, un grand nombre d'auteurs se sont penchés sur la nature exacte de ce métamodèle dans le cadre de simulations numériques déterministes. Parmi ceux-ci, (Sacks et al., 1989) suggère le *krigeage*, méthode géostatistique initialement développée par (Krigé, 1952) pour l'évaluation des ressources minières, comme métamodèle. En somme, le krigeage est une méthode **d'interpolation** basée sur la régression des valeurs observées, auxquelles sont associés des poids proportionnels à la covariance spatiale. Le développement mathématique du krigeage est donné à l'Annexe A. Ici, il suffit de mentionner que le vecteur de fonctions objectifs *estimées*  $\hat{\mathbf{y}} = \{\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_{N-1}, \hat{y}_N\}$ ,  $n = 1, \dots, N$  fonctions objectifs, pour une combinaison de variables de conception  $\hat{\mathbf{x}} = \{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{M-1}, \hat{x}_M\}$ , pour  $M$  variables de conception, est calculé à l'aide de l'équation suivante

$$\hat{\mathbf{y}}(\hat{\mathbf{x}}) = \boldsymbol{\mu}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}), \quad (2.1)$$

---

11. Dans la littérature, on parle souvent de *surrogate modeling* ou bien de *response surface modeling*.

12. Bien sûr, une solution optimale choisie à l'aide de cette approximation devra être validée.

où  $\boldsymbol{\mu}(\hat{\mathbf{x}})$  représente la tendance du modèle, ou l'espérance de l'estimateur  $\hat{\mathbf{y}}$ , et  $\mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}})$  est le vecteur résidu au point  $\hat{\mathbf{x}}$ , estimé comme étant égal à une somme pondérée des résidus aux points limitrophes. Comme l'indique (Isaaks and Srivastava, 1989), la grande majorité des méthodes d'interpolation pour la génération de métamodèles (e.g. splines, triangulation, etc.) utilisent une pondération basée sur l'inverse de la distance entre les points. Les points limitrophes auront donc une plus grande influence sur le point en question que ceux plus éloignés. Le krigeage se distingue des autres méthodes de par la nature de cette pondération. En effet, les poids sont des quantités dérivées d'une fonction covariance qui cherche à minimiser la variance de l'estimateur, et non une simple fonction polynomiale. Plusieurs formes de krigeage existent, dont le *krigeage simple et ordinaire*. Toutefois, on peut démontrer (voir l'Annexe A) que ces deux formes sont des cas particuliers du *krigeage universel*.<sup>13</sup> Celui-ci s'exprime sous la forme

$$\hat{\mathbf{y}}(\hat{\mathbf{x}})^{ku} = \boldsymbol{\mu}(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{\alpha=1}^A \lambda_{\alpha}^{ku} (\mathbf{y}(\mathbf{x}_{\alpha}) - \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}_{\alpha})), \quad (2.2)$$

où  $A$  est le nombre de points limitrophes,  $\boldsymbol{\mu}$  est désormais une fonction polynomiale interpolant les points  $\mathbf{x}_{\alpha}$  limitrophes au point estimé  $\hat{\mathbf{x}}$ , et  $\lambda_{\alpha}^{ku}$  sont les poids pour le krigeage universel. Sous forme matricielle, on peut réécrire cette équation sous la forme familière

$$\hat{\mathbf{y}}(\hat{\mathbf{x}})^{ku} = \boldsymbol{\mu}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{k}^{ku\top} \mathbf{K}^{ku-1} (\mathbf{y}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})), \quad (2.3)$$

où  $\mathbf{k}$  est le vecteur de covariance entre les points  $\mathbf{x}$  et le point estimé  $\hat{\mathbf{x}}$ , et  $\mathbf{K}$  est la matrice de covariance entre les points  $\mathbf{x}$ . Il est important de noter que si  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}$ , i.e. le point estimé fait partie du plan d'expérience nécessaire à la génération du métamodèle par interpolation, alors  $\hat{\mathbf{y}}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ ; le modèle interpole *exactement*. D'un point de vue pratique, il suffit donc de préciser le polynôme pour  $\boldsymbol{\mu}$  ainsi que la forme du vecteur et de la matrice de covariance,  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{K}$ , respectivement. Pour plus d'informations sur le développement mathématique du krigeage, voir Annexe A, notamment l'équation (A.33). Ce développement a été adapté de Stein et al. (2002).

#### 2.4.5 Recherche optimale

Une fois le métamodèle déterminé et évalué à partir des points issus du plan d'expérience, nous avons dès lors à notre disposition un outil puissant nous permettant d'évaluer les fonctions objectifs sans devoir lancer une séquence de simulations par éléments finis. Conséquemment, l'idée derrière la recherche optimale est de déterminer le point  $\bar{\mathbf{x}}$  associé à la *meilleure combinaison possible* de fonctions objectifs. Ici, nous mettons l'emphasis sur le fait que pour le cas

---

13. On y réfère aussi par krigeage avec tendance (kriging with trend).

d'un problème à plusieurs fonctions objectifs, la notion de *solution globale* utilisée en optimisation à un seul objectif ne s'applique plus : on parle plutôt de solutions *Pareto optimale*, ou plus précisément de solution *Pareto optimale*.<sup>14</sup>

Puisqu'avec notre métamodèle il nous est maintenant possible d'approximer rapidement les fonctions objectifs, et aussi considérant que celui-ci contient plusieurs solutions locales Pareto optimales et qu'une solution unique est inexistante, nous allons nous concentrer sur une famille de méthode bien particulière, soit les algorithmes *d'optimisation heuristiques*. Dans ce qui suit, nous allons nous restreindre aux concepts nécessaires à la recherche d'approximations des solutions Pareto optimales à l'aide de ladite famille de méthodes.

#### 2.4.6 Solution Pareto optimale

Dans un problème comme le nôtre où il est nécessaire d'avoir plusieurs fonctions objectifs, une solution optimale sera alors un vecteur de fonctions objectifs  $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = [y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), \dots, y_N(\mathbf{x})]$  où un équilibre devra régner.<sup>15</sup> L'optimisation de ce vecteur de fonctions objectifs  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$  est un problème communément appelé *d'optimisation multi-objectifs* et prend la forme suivante

$$\begin{cases} \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^M}{\text{minimiser}} & \mathbf{y}(\mathbf{x}), & \text{sujet à,} \\ G_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \dots, r; \mathbf{bi} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{bs}, \end{cases} \quad (2.4)$$

où le vecteur de fonction objectifs est sujet à  $r$  contraintes et où la solution  $\mathbf{x}$  est bornée par  $\mathbf{bi}$  et  $\mathbf{bs}$ . Comme on peut le constater, les différents objectifs à minimiser sont donc en compétition les uns et les autres et une solution *unique* n'existe pas. On utilise plutôt le concept de *dominance*, ou de solution Pareto optimale, (Zadeh, 1963; Cunha and Polak, 1967; Censor, 1977). Avant de définir ce qu'est une solution Pareto optimale, définissons le concept d'espace paramétrique et fonctionnel. Comme le montre la Fig. 2.9(a) pour un cas en deux dimensions, le domaine des  $M$  variables de conception dans l'espace paramétrique satisfaisant toutes les contraintes du problème d'optimisation est dénoté

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^M\}, \quad \text{sujet aux contraintes.} \quad (2.5)$$

---

14. De manière générale, une solution Pareto optimale est une solution où il est impossible d'améliorer un objectif sans nuire à un autre.

15. Afin d'être consistant avec notre notation du krigeage, on aurait dû écrire  $\hat{\mathbf{y}}(\hat{\mathbf{x}})$ , puisqu'on évalue l'estimateur du métamodèle à un point d'intérêt à la recherche d'une solution optimale. Toutefois, pour éviter d'alourdir la lecture, nous allons considérer  $\hat{\mathbf{y}}(\hat{\mathbf{x}}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}(\mathbf{x})$ .

Cela nous permet de définir la région correspondante des  $N$  fonctions objectifs possibles dans l'espace fonctionnel, Fig. 2.9(b)

$$B = \{\mathbf{y}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^N \mid \mathbf{x} \in A\}. \quad (2.6)$$

Autrement dit, le vecteur des fonctions objectifs  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$  transforme l'espace paramétrique en l'espace fonctionnel.

Une solution Pareto optimale en est une où une amélioration d'un objectif n'est possible qu'en entraînant la dégradation d'un autre. Autrement dit, la solution  $\mathbf{x}^* \in A$  est dite Pareto optimale si, dans un voisinage de  $\mathbf{x}^*$ , il n'existe **aucun**  $\Delta\mathbf{x}$  de telle sorte que  $(\mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x}) \in A$  (i.e. est aussi une solution) et

$$\begin{aligned} y_i(\mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x}) &\leq y_i(\mathbf{x}^*), \quad i = 1, \dots, M, \quad \text{et} \\ y_j(\mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x}) &< y_j(\mathbf{x}^*), \quad \text{pour au moins un } j. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Par exemple, à la Fig. 2.10 pour un cas en deux dimensions, les solutions Pareto optimales se situent le long de E-D. On voit clairement que l'amélioration<sup>16</sup> d'un objectif entraîne immédiatement la dégradation de l'autre, i.e.  $y_1^D(\mathbf{x}) < y_1^E(\mathbf{x})$ , mais  $y_2^D(\mathbf{x}) > y_2^E(\mathbf{x})$ .

L'objectif de l'optimisation multi-objectifs est donc de générer l'espace de toutes les solutions Pareto optimales, ou autrement dit, de construire le *front de Pareto* (Ruzika and Wiecek, 2005; Konak et al., 2006).<sup>17</sup> C'est par la suite au tour de l'utilisateur de choisir quelle solution parmi celles de Pareto est la plus adéquate pour le problème en question.

Nous tenons à noter que malgré notre choix d'utiliser les solutions Pareto optimales comme solutions de notre optimisation multi-objectifs, une autre approche fondamentale existe dans la littérature. Cette alternative, dénotée *approche scalaire*, transforme le vecteur multi-objectifs en une somme pondérée des objectifs normalisés. La difficulté de cette approche réside dans la sélection adéquate des poids (Ehtgott, 2005). Dans la pratique, cela peut s'avérer difficile de déterminer précisément la valeur de ces poids, même pour un procédé familier. De plus, la normalisation des fonctions objectifs entraîne souvent un problème de conditionnement où une petite perturbation des poids change considérablement le résultat.

---

16. On cherche à minimiser les fonctions objectifs

17. Ce nom peut parfois porter à confusion, notamment lorsque l'on essaie de comparer plus de deux objectifs simultanément (e.g. pour trois objectifs, on obtiendrait une surface). Ainsi, il est préférable de comparer les objectifs un par un, et de déterminer une certaine tendance (Caramia and Dell'Olmo, 2008).

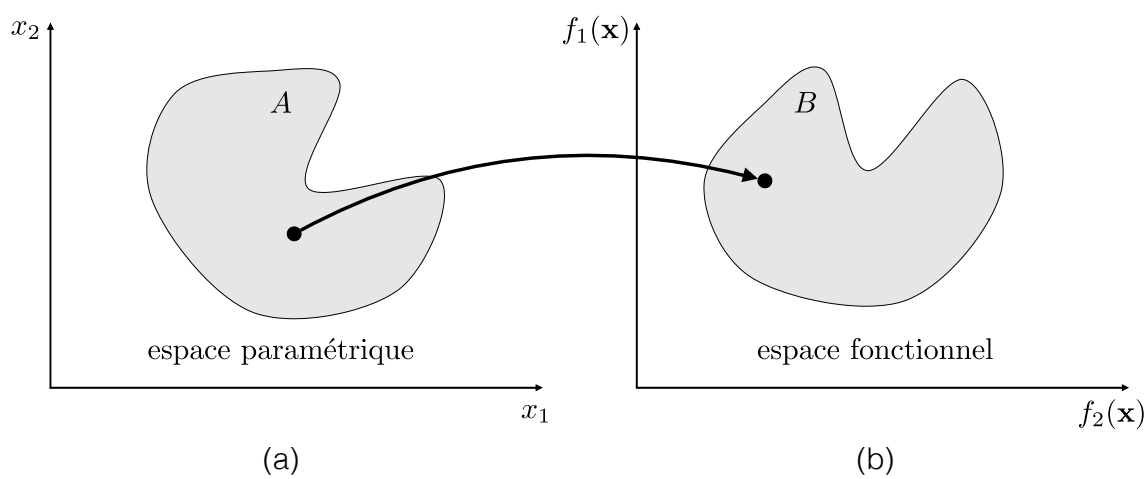


Figure 2.9 Transformation de l'espace paramétrique à l'espace fonctionnel

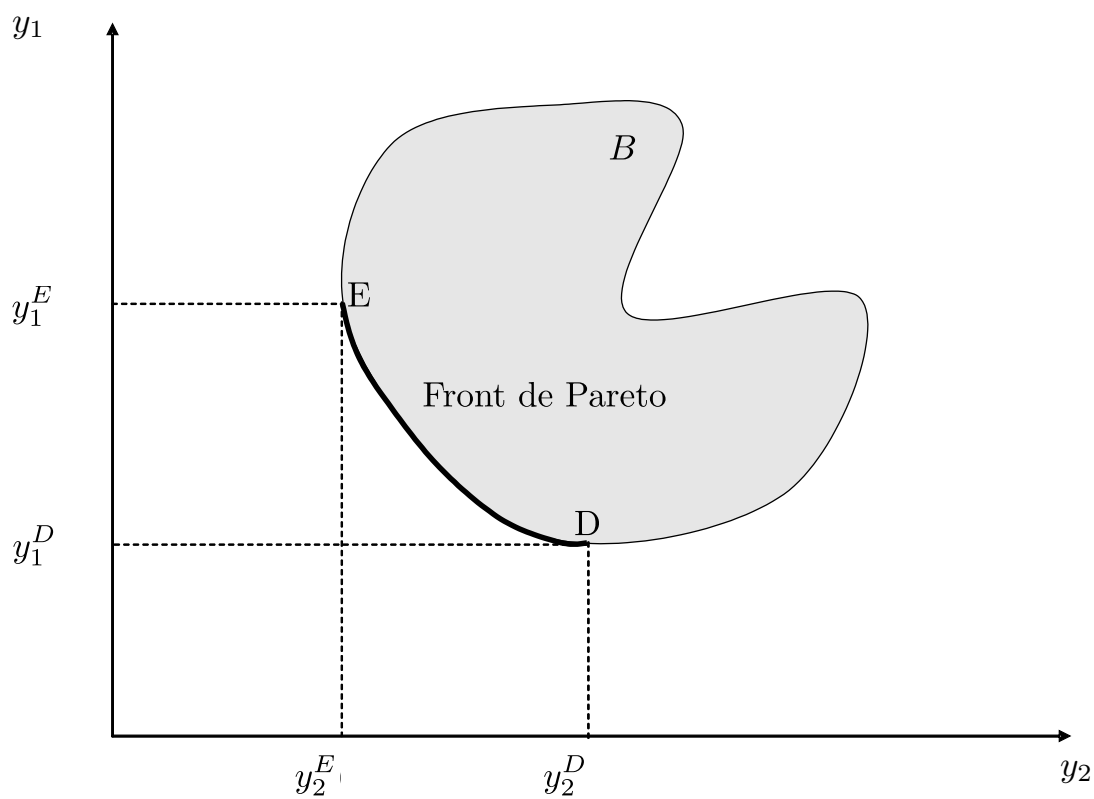


Figure 2.10 Exemple d'un ensemble de solutions représenté par le front Pareto

### 2.4.7 Algorithme de recherche

Nous nous intéressons maintenant aux approches disponibles dans la littérature afin d'obtenir des approximations des solutions Pareto optimales.

Dans cette thèse nous allons nous concentrer sur la méthode d'optimisation multi-objectifs par algorithme génétique, celle-ci ayant fait ses preuves à maintes reprises dans plusieurs domaines d'ingénierie et bioingénierie, de la santé, etc. (Holland, 1975; Schaffer, 1985; Hajela and Lin, 1992; Horn et al., 1994; N.Srinivas and Deb, 1994; Murata and Ishibuchi, 1995; Zitzler and Thiele, 1999). L'algorithme génétique a été retravaillé au fil des années, pour enfin arriver à la fameuse version proposée par Deb (2001). Étant donnée sa maturité et ses nombreuses applications, c'est celle-ci que nous utiliserons.

Les fondements des algorithmes génétiques reposent sur le processus de sélection naturelle. Un tel algorithme modifie successivement une *population d'individus* (un ensemble de combinaisons de variables de conception). À chaque itération, l'algorithme génétique attribue premièrement un score à chaque point (individu) basé sur la valeur de leurs fonctions objectifs. Par la suite, une nouvelle population d'individus est générée en suivant trois règles importantes. La première est la règle de *sélection*. Celle-ci vient choisir un certain nombre d'individus ayant un score élevé qu'on dénote *parents*. Par la suite, la règle de *reproduction*<sup>18</sup> combine ces parents afin de former des *enfants* pour la prochaine génération. La dernière règle, la *mutation*, applique un changement aléatoire à un parent afin de créer un enfant<sup>19</sup> pour la prochaine génération. Le processus est répété en séquence jusqu'à ce qu'une population individus atteigne la solution Pareto optimale. La procédure générique est résumée ci-bas.

- {1} Initialisation en générant aléatoirement une population initiale d'individus.
- {2} Il y a génération, de manière itérative, d'une série de nouvelles populations. À chaque itération, l'algorithme utilise les individus de la population courante afin de créer la prochaine génération en suivant les étapes suivantes :
  - (a) Un score est attribué à chaque individu de la population courante en fonction de la valeur des fonctions objectifs correspondantes.
  - (b) Normalisation de ces scores et conversion selon une échelle plus adéquate pour notre utilisation.
  - (c) Parmi ces individus, sélection des *parents* basé sur leur score normalisé.

---

18. Dénomé *Crossover* dans la littérature.

19. Le terme *enfant* dénote n'importe quels individus d'une population continuant à la prochaine génération.



- (d) Certains individus de la population courante ayant le score le plus élevé (i.e. valeur de fonctions objectifs basses) sont choisis comme *élites* de leur population. Ceux-ci passeront directement à la génération suivante.
- (e) Production des enfants pour la prochaine génération. Ceux-ci sont conçus soit en appliquant un changement aléatoire à un parent, une *mutation*, ou en combinant les vecteurs d'entrées (variables de conception) d'une paire de parents, une *reproduction*.
- (f) Remplacement de la population courante avec les *enfants* afin de former la nouvelle génération.

{3} L'algorithme se termine et une solution optimale est obtenue lorsque le critère d'arrêt est atteint.

L'algorithme de Deb (2001) est disponible sous la forme d'un "global optimization toolbox" dans Matlab (Matlab, 2015a).

#### 2.4.8 Validation de la solution

Une fois la recherche terminée, nous avons en main un ensemble d'approximations des solutions Pareto optimales, estimées à partir d'un métamodèle de la boîte noire qu'est notre modélisation numérique du procédé. Autrement dit, ces solutions dites optimales ne sont à priori qu'approximatives.

C'est pour cette raison que nous devons nous assurer de la précision de ces solutions en utilisant les variables de conception estimées comme entrée dans notre séquence de simulations par éléments finis, puis de comparer la réponse alors obtenue avec la solution estimée. Le processus est répété pour chacune des solutions du front de Pareto, et une mesure d'erreur est calculée. Par exemple, suivant Bonte et al. (2008, 2010), l'erreur est

$$\varepsilon = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{|y(\mathbf{x})_k^o - y(\mathbf{x})_k^s|}{y(\mathbf{x})_k^o}, \quad (2.8)$$

où  $y(\mathbf{x})_k^o$  est une solution Pareto optimale obtenue à travers l'optimisation,  $y(\mathbf{x})_k^s$  est la solution obtenue *a posteriori* avec la simulation numérique et  $K$  est le nombre de solutions Pareto optimales. Si le critère d'erreur n'est pas satisfait, les points  $\mathbf{x}$  associés à  $y(\mathbf{x})_k^o$  sont ajoutés au plan d'expérience, et le processus est répété tant et aussi longtemps que le critère d'arrêt est atteint. Ce processus est appelé *amélioration séquentielle*.

Un sommaire de la procédure d'optimisation est illustré à la Fig. 2.11. Dans cette Figure, le

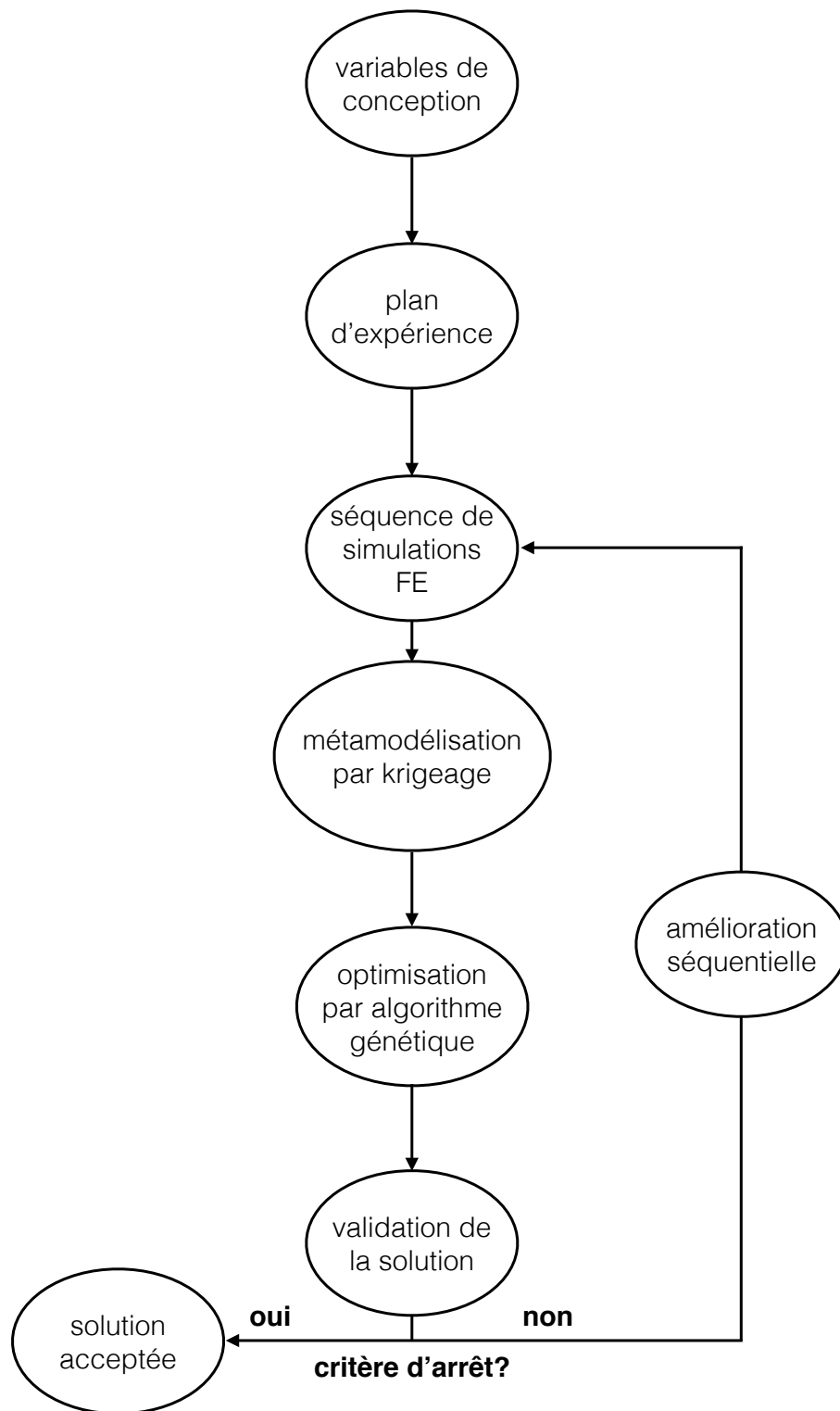


Figure 2.11 Séquence d'optimisation séquentielle du procédé [Adaptation de Bonte et al. (2008)]

choix des variables de conception est une étape cruciale afin de diminuer le coût de l'optimisation. Une discussion suit.

### 2.4.9 Choix des variables de conception

Le choix des variables de conception est la première étape à laquelle doit faire face l'utilisateur. Cette étape est d'autant plus importante puisque le nombre de variables affecte directement le nombre d'évaluations nécessaires pour la convergence de l'algorithme d'optimisation. En général, une règle empirique estime à environ  $1000 \times M$  le nombre d'évaluations nécessaires, où  $M$  est le nombre de variables de conception.

Généralement, dans le cas d'un procédé industriel, un choix des variables de conception basé sur l'expérience seule de l'utilisateur avec le procédé est suffisant. Toutefois, avec la complexité grandissante des procédés, il peut s'avérer utile d'appliquer une méthode statistique pour le filtrage des variables. L'objectif revient donc à déterminer statistiquement les variables ayant le plus d'impacts sur les fonctions objectifs. Celles ayant le moins d'effets pourront ainsi être fixées, diminuant le nombre total de variables de conception à optimiser.

D'un point de vue statistique, répondre à cet objectif correspond à déterminer le meilleur modèle de *régression* possible (Freedman, 1983; Neter et al., 1996). Rappelons qu'en régression linéaire, un modèle de régression est n'importe quelle combinaison linéaire des variables indépendantes de conception, soit

$$y(\mathbf{x}) = b_0 + \sum_{l=1}^L b_l x_l, \quad (2.9)$$

où les  $b_l$  sont les coefficients de régressions à déterminer par la méthode des moindres carrés. Il faut donc évaluer les  $2^L$  modèles de régression et ensuite les comparer selon une mesure commune. Par exemple, pour  $L = 2$  variables de conception, les  $2^2 = 4$  modèles de régression à évaluer pour chaque objectif sont

$$\begin{aligned} y(\mathbf{x})_1 &= b_0, \\ y(\mathbf{x})_2 &= a_0 + b_1 x_1, \\ y(\mathbf{x})_3 &= a_0 + b_2 x_2, \\ y(\mathbf{x})_4 &= a_0 + b_3 x_1 + b_4 x_2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

#### 2.4.10 Qualité d'un modèle de régression

Une fois les modèles de régression linéaire construits, la détermination de la qualité de chaque modèle se fait à partir d'une analyse de variance (ANOVA). En somme, le but est de déterminer lequel des  $2^L$  modèles satisfait mieux que les autres un certain critère. Les variables de conception impliquées dans ce modèle seront alors celles ayant le plus d'impacts sur les fonctions objectifs et devront être conservées durant l'optimisation, les autres pouvant être fixées.

Toutefois, nous devons toujours répondre aux questions suivantes : Quel critère utiliser ? Faut-il évaluer les modèles selon une séquence particulière ? Malheureusement, il n'y pas de réponse absolue et l'utilisateur devra utiliser son jugement dans la majorité des cas. Afin de prendre une décision éclairée, nous proposons quelques options basées sur la méthode d'analyse de la variance (Myers et al., 2002; Hines et al., 2011).

Lors de l'évaluation de la qualité d'un modèle à travers une analyse de variance, nous obtenons généralement deux catégories d'information, une concernant le modèle dans son ensemble, et l'autre concernant les variables de conception impliquées.

Concernant l'information sur le modèle dans son ensemble, le *coefficient de détermination*  $R^2$ , le *coefficient de détermination ajusté*  $R_a^2$  et la statistique  $F$  donnent une vue d'ensemble de l'aptitude du modèle à représenter les données (Matlab, 2015b). Le coefficient  $0 < R^2 < 1$  indique l'aptitude du modèle à expliquer la variabilité des données. Une valeur de  $R^2 = 0.93$  par exemple indique que le modèle est capable de représenter à 93% la variabilité des données. Plus cette valeur est élevée, plus le modèle est adéquat. De toute évidence, lorsque le nombre de variables augmente dans un modèle de régression, on s'attend à ce que la qualité de prédiction du modèle augmente. Afin d'éviter d'obtenir un modèle avec une infinité de variables, on utilise à la fois le coefficient ajusté  $R_a^2$  qui vient pénaliser l'ajout d'une variable additionnelle au modèle. Quant à la statistique  $F$ , celle-ci vient tester si le modèle est *significatif* en comparant le modèle en question avec un modèle sans aucune variable. Plus la statistique  $F > 0$  est élevée, plus le modèle est significatif en terme d'aptitudes à prédire les résultats comparativement au modèle sans variables.

Concernant les variables utilisées dans chaque modèle, à chacune est attribuée une *valeur-P*. En somme, cette valeur vient vérifier si la variable en question ajoute quelque chose de significatif au modèle pour la *combinaison de variables donnée*. Pour être significative, une variable doit avoir une  $P - \text{valeur} < \alpha_{\text{seuil}}$ , où  $\alpha_{\text{seuil}}$  est le seuil de signification pour la loi de Student, typiquement  $0.01 \leq \alpha_{\text{seuil}} \leq 0.05$ .<sup>20</sup> Par exemple, si, pour un modèle donné, la

---

20. Ce seuil vient vérifier s'il y a  $(1 - \alpha)\%$  de probabilité que le coefficient soit bel et bien significatif.

$P$  – valeur d’une variable est supérieure à  $\alpha_{\text{seuil}}$ , alors l’utilisateur pourrait éliminer cette variable, et réévaluer le modèle.

Les informations découlant d’une analyse ANOVA sont suffisantes pour notre application. Par contre, nous tenons à mentionner un autre outil d’évaluation de la qualité d’un modèle, soit le *critère d’information Bayesian (BIC)* (Schwarz, 1978; Kass and Wasserman, 1995). Celui-ci est donné par

$$BIC = 2 \ln(\hat{\theta}) - (L + 1) \ln(A), \quad (2.11)$$

où  $\hat{\theta}$  est la vraisemblance du modèle estimé<sup>21</sup>,  $L$  est le nombre de variables indépendantes<sup>22</sup> et  $A$  est le nombre total de points, ou d’observations. Le modèle qui sera sélectionné est celui qui *maximise* le critère BIC.

#### 2.4.11 Sélection d’un modèle de régression

La sélection d’un modèle se fait en comparant successivement les modèles de régression en fonction du critère choisi. Plusieurs méthodes existent dans la littérature comme la sélection par étapes *avant*, qui consiste à tester un modèle à une variable, puis d’en ajouter une seconde et d’évaluer l’impact. Si l’impact est positif, on conserve cette variable et on ajoute une troisième, sinon, on l’enlève et on choisit une nouvelle variable de départ. Le processus est répété jusqu’à ce le meilleur modèle est atteint (Neter et al., 1996). Une autre approche consiste à évaluer tous les modèles possibles, et à comparer les modèles de mêmes dimensions entre eux (e.g. modèle à une variable, à deux variables, etc.) (Choi and Kim, 2005).

Malgré toutes ces méthodes, nous tenons à mentionner que le choix ultime des variables de conception demeure subjectif, et qu’il n’y a pas de meilleures manières de choisir, tant et aussi longtemps que le choix demeure cohérent concernant la mesure du critère de qualité.

### 2.5 Modèle constitutif pour l’acier martelé

Un ingrédient déterminant dans la compréhension du procédé de martelage est la connaissance du matériau martelé. Présentement chez Hydro-Québec, les réparations des fissures se font à l’aide d’un dépôt d’acier inoxydable austénitique, plus particulièrement d’un dépôt d’acier d’apport E309L.<sup>23</sup> Le choix du métal d’apport pour la réparation des fissures sur les aubes de turbines hydro-électriques a déjà fait l’objet d’une analyse chez Hydro-Québec,

21. Cette valeur est donnée par une analyse ANOVA

22.  $L + 1$  est donc le nombre total de coefficients de régression, incluant l’origine  $b_0$ .

23. Métal d’apport AWS A5.22 :E309T1-1/T1-4 pour le soudage flux-cored (FCAW) fourni par Shield-Bright. La désignation L indique la gamme E309 ayant un faible niveau de carbone.

Lanteigne et al. (2001). En somme, l'acier d'apport pour le soudage doit être compatible tant chimiquement que mécaniquement au métal de base de l'aube, soit le CA-6NM. Le CA-6NM est un acier inoxydable martensitique coulé de haute résistance pour la fabrication de roues entières. Sa composition est contrôlée pour les éléments de chrome, nickel, molybdène, silicium, manganèse, carbone, soufre et phosphore. Malgré ses bonnes propriétés mécaniques et de résistance à la cavitation et à la corrosion, sa structure martensitique et sa grande trempabilité rendent son utilisation inadéquate pour la réparation par soudage, car celui-ci nécessiterait un traitement post-soudage risqué à  $600^{\circ}\text{C}$ <sup>24</sup>. L'acier inoxydable austénitique E309L, quant à lui, est ductile, tenace et facile à souder sur les aciers au carbone et les aciers martensitiques. Sa composition de chrome, manganèse, nickel, molybdène, silicium, manganèse, carbone, soufre et phosphore est chimiquement compatible avec le CA-6NM. C'est d'ailleurs le métal d'apport recommandé pour souder les aciers inoxydables.

Il est donc important de déterminer les propriétés mécaniques de l'acier E309L et de choisir un modèle constitutif approprié pour son comportement élastique-plastique. Malheureusement, peu de données expérimentales sont disponibles dans la littérature. De plus, les études existantes (Meyer and Toit, 2008; Devendranath et al., 2011; Z. L. Wang, 2014) étudient généralement le comportement d'un acier E309L soudé selon des conditions spécifiques différentes de celles utilisées en industrie. Cela rend leurs résultats expérimentaux à toutes fins inutilisables. Les résultats expérimentaux de Lanteigne et al. (2001) servent de point de départ. Toutefois, comme nous le verrons ci-dessous, une campagne expérimentale plus exhaustive est nécessaire.

En effet, l'état des connaissances des aciers inoxydables est avancé étant donné ses nombreuses applications en ingénierie, Byun et al. (2004). Par exemple, la gamme d'acier austénitique de la série 300 conserve sa haute résistance et ductilité à travers une vaste plage de température, en même temps qu'offrir une excellente résistance à la corrosion et à l'oxydation. De plus, ces aciers ont fait l'objet de plusieurs études au cours des dernières décennies et une grande librairie de résultats expérimentaux est disponible. De par sa composition chimique similaire, tel qu'indiqué au Tableau 2.1, l'acier 304L est un candidat idéal afin de déterminer les phénomènes qu'un modèle constitutif devrait respecter. Par exemple, dans les travaux de Krempl (1979), la sensibilité de la réponse au taux de chargement durant un essai de traction uniaxiale à température ambiante a été démontrée. Même à température ambiante, la réponse d'un tel acier peut varier jusqu'à 25% lorsque le taux de chargement passe de  $10^{-8}$  à  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$ . Une sensibilité importante à la température a aussi été démontrée par Byun et al. (2004). Ces comportements sont illustrés graphiquement aux Figures 2.12-2.13. Krempl

---

24. Un tel traitement crée des structures de trempes fragiles.

(1979) a aussi observé la présence importante de l'effet Bauschinger lors du renversement de la charge durant des essais cycliques, Fig. 2.14. Depuis, ces observations ont été confirmées à maintes reprises (Paquet, 2006).

Le développement d'une théorie constitutive regroupant ces multiples phénomènes plastiques porte un nom particulier, soit une théorie de *plasticité unifiée* (Slavic and Sehitoglu, 1986; Chaboche and Nouailhas, 1989a). Dans de telles théories, le comportement sensible à la température et au taux de chargement est décrit à travers une *loi viscoplastique*, tandis que l'effet de Bauschinger est décrit par une *loi de comportement cyclique*. Les difficultés proviennent non seulement du choix des modèles constitutifs pour chaque phénomène, mais aussi du couplage entre ces lois. Par exemple, dans Slavic and Sehitoglu (1986), le couplage entre les deux mécanismes se fait par l'entremise d'un critère *par morceaux* basé sur la contrainte dans l'équation d'écoulement plastique. Dans cette théorie, la détermination de l'intervalle où tel ou tel mécanisme entre en jeu est calibrée en fonction des résultats expérimentaux. Cette approche est difficile et une extrapolation des données expérimentales est souvent nécessaire. Une approche similaire est proposée par Abdel-Karim and Ohno (2000) où cette fois-ci, la loi viscoplastique est ajustée en incluant une somme de sous-fonctions dépendantes de la contrainte. Ces sous-fonctions sont considérées comme étant des régions sphériques dont le rayon dépend de la variable cinématique. Toutefois, ce modèle souffre du fait qu'il implique une quantité élevée de paramètres matériaux, et du fait que le couplage est rigide, c'est-à-dire qu'il serait difficile de modifier la loi viscoplastique sans bouleverser les fondements de la théorie.<sup>25</sup> Dans Kang et al. (2002b), le modèle viscoplastique est couplé au modèle cyclique par l'entremise d'une fonction étagée.<sup>26</sup> Encore une fois, ce modèle est restreint d'une part par la région limitée où les deux mécanismes agissent de manière simultanée, et d'autre part par le couplage rigide, cette fois-ci à travers la fonction étagée. Un constat similaire est fait dans les travaux de (Ohno and Wang, 1993, 1994), où un changement bilinéaire du modèle cyclique est utilisé.

Nous trouvons dans la littérature plusieurs modèles spécifiques de plasticité unifiée, chacun ayant ses particularités. Toutefois, tous ces modèles sont rigides dans le sens où si l'on voulait ne changer que la partie viscoplastique, ou que la partie cyclique, ce changement serait difficile. De plus, cette considération est d'autant plus frustrante étant donné l'existence de modèles de viscoplasticité (Perzyna, 1971; Zienkiewicz and Corneau, 1963; Anand, 1985; Molinari and G.R. Canova, 1987; Chaboche) et de modèles cycliques (Kang et al., 2002a,b;

---

25. Il pourrait être utile de substituer une loi viscoplastique pour modéliser des problèmes de nature différente. Par exemple, pour tenir compte des effets de la température et du taux de chargement, ou tout simplement afin de simplifier le modèle pour un essai simple à température ambiante.

26. i.e. piecewise-constant

Kang and Kan, 2007; Kang, 2008; Kang et al., 2011; Khutia et al., 2014; Khutia et al.) performants. Il serait donc intéressant d'avoir à notre disposition un cadre théorique nous permettant d'aisément choisir un modèle viscoplastique et cyclique parmi la littérature et d'assurer un couplage entre les deux.

Tableau 2.1 Composition chimique typique des aciers E309L et 304L (wt.%). Les limites acceptables maximales sont indiquées

Matériau	C	Mn	Si	Cr	Ni	Mo	Cu	P	S	N
E309L	0.03	1.3	0.9	24	12.5	0.1	0.1	0.045	0.03	0
304L	0.08	2	0.75	20	12	-	-	0.045	0.03	0.1



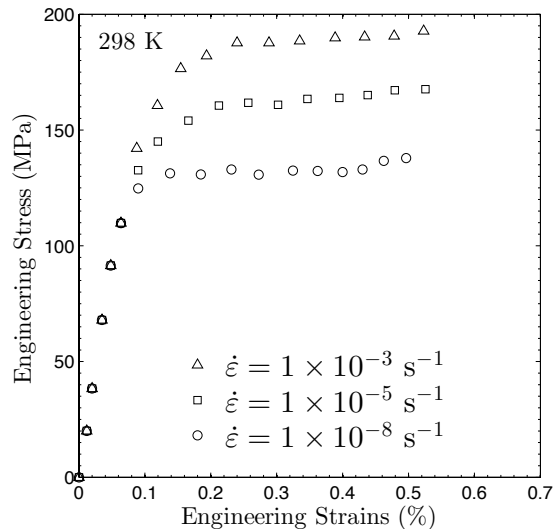


Figure 2.12 [Adaptée de Krempl (1979)] La sensibilité au taux de déformation lors d'essais de traction uniaxiale est illustrée

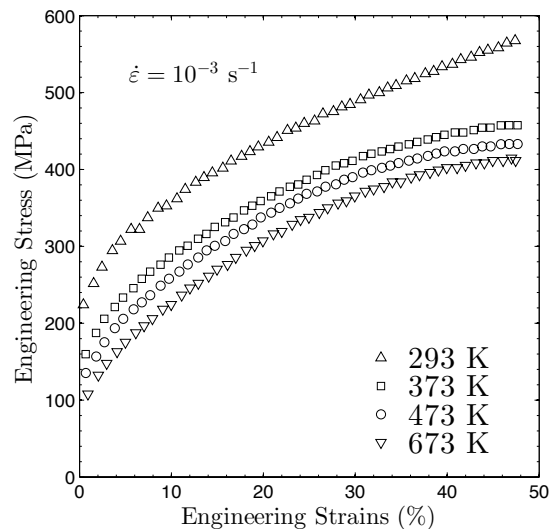


Figure 2.13 [Adaptée de Byun et al. (2004)] La sensibilité à la température lors d'essais de traction uniaxiale est illustrée.

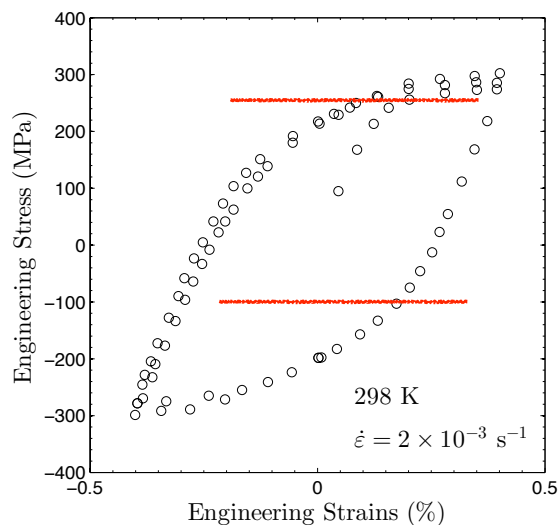


Figure 2.14 [Adaptée de Kang et al. (2002a)] L'effet de Bauschinger est illustré lors d'essais cycliques. Noter la contrainte à laquelle la plasticité débute lors du renversement du chargement

### CHAPITRE 3 DESCRIPTION DE LA DÉMARCHE SCIENTIFIQUE

L'objectif principal des travaux présentés dans cette thèse est de développer un outil numérique pour l'optimisation des paramètres opérationnels du martelage industriel. Les étapes nécessaires afin de répondre aux objectifs du projet sont illustrées à la Fig. 3.1 et sont (i) d'obtenir les propriétés mécaniques du matériau à marteler et par la suite déterminer le modèle constitutif adéquat dudit matériau ; (ii) d'implanter le martelage dans un logiciel par éléments finis et de définir des quantités mesurables pour suivre le progrès du martelage ; et (iii) de développer une structure d'optimisation numérique afin d'obtenir des approximations des paramètres de martelage optimaux.

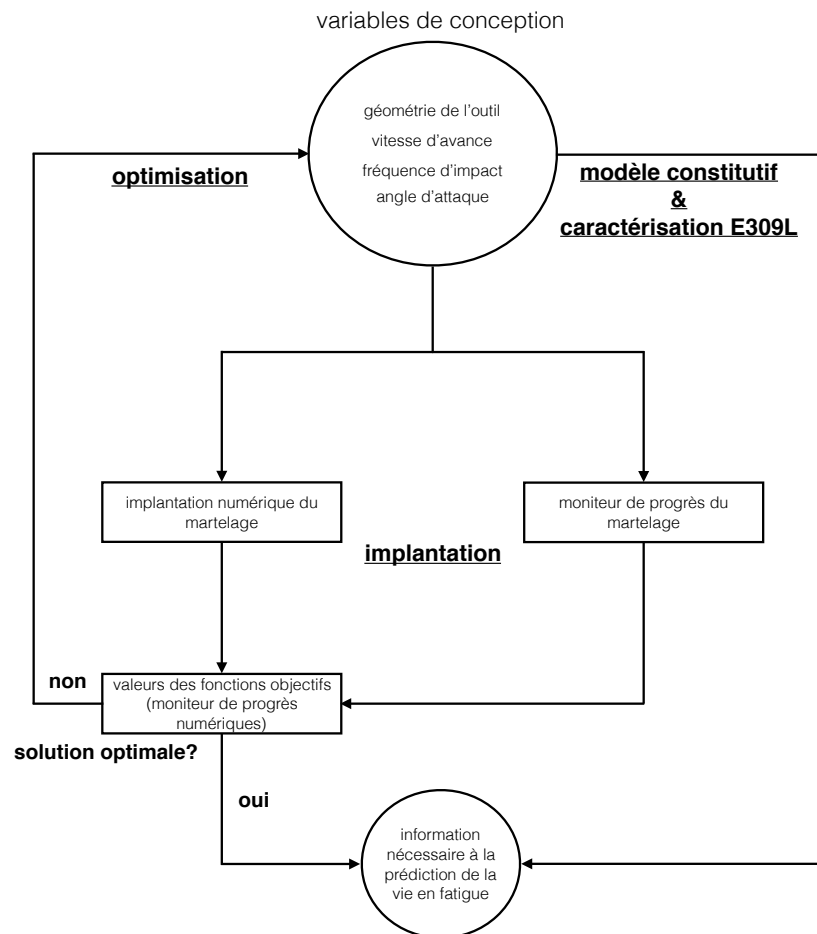


Figure 3.1 Schéma de la séquence de travail pour l'implantation d'un outil d'optimisation du procédé de martelage et la modélisation du E309L. Les grandes étapes y sont illustrées

Les résultats sont quant à eux présentés sous forme de quatres (4) articles :

- Article 1 : A unified plasticity methodology for rate- and temperature-sensitive alloys exhibiting a non-linear kinematic hardening behaviour. *Publié dans Acta Mechanica Solida Sinica*. DOI : 10.1016/j.camss.2016.09.001.
- Article 2 : Sequential approximate optimization of industrial hammer peening using finite element simulations. *Publié dans Structural and Multidisciplinary Optimization*. DOI : 10.1007/s00158-016-1538-7.
- Article 3 : Mechanical properties of 75% Ar / 25% CO<sub>2</sub> flux-cored arc welded E309L austenitic stainless steel. *Publié dans Materials Science and Engineering A*. DOI : 10.1016/j.msea.2016.09.099.
- Article 4 : Trajectory optimization of industrial hammer peening of weld seams using sequential approximate optimization. *En révisions le 4 mars 2017, dans Optimization and Engineering*.

### 3.0.1 Article 1 : A unified plasticity methodology for rate- and temperature-sensitive alloys exhibiting a non-linear kinematic hardening behaviour

Tel que présenté au Chapitre 2, un modèle constitutif est nécessaire pour une modélisation numérique du comportement de l'acier martelé E309L soumis à des conditions de martelage et soudage. Nous avons aussi déterminé que cet acier fait partie de la même famille que l'acier 304L dont nous avons déjà une bonne idée de son comportement physique. En effet, les phénomènes à prendre en considération sont nombreux et peuvent inclure les grandes déformations (rotations), l'effet de la température, l'effet du comportement cyclique due à la charge répétitive, l'effet de la vitesse de déformation et plus encore. Dans cette optique, l'objectif principal de cet article est de développer un modèle constitutif pouvant tenir compte de tous ces phénomènes simultanément.

**Partie expérimentale :** Cette partie expérimentale fait suite aux résultats préalablement obtenus par Paquet (2006) pour de l'acier 304L. Des essais additionnels de traction-compression cycliques ont été effectués avec des amplitudes de déformations de 0.5% et 0.8% et un taux de chargement de  $2 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ . Ces essais ont été effectués afin de valider le modèle théorique développé.

**Partie numérique :** Nous avons développé un modèle constitutif combinant les différents phénomènes décrits ci-haut. Ce modèle permet de représenter le comportement des aciers inoxydables austénitiques et ce, de manière efficace et thermodynamiquement admissible. À ma connaissance, il n'existe pas de travaux qui proposent une méthodologie aussi claire et concise. Le modèle a été implanté dans le logiciel Abaqus/Standard (Abaqus/Standard, 2013) à l'aide d'une sous-routine UEL.

Les résultats expérimentaux ont par la suite été utilisés afin de calibrer et de valider les prédictions numériques du modèle. Nous tenons à mentionner que malgré la nouveauté de ce modèle et son implantation numérique, les travaux concernant l'optimisation n'ont pas inclus de modèle constitutif.

### **3.0.2 Article 2 : Sequential approximate optimization of industrial hammer peening using finite element simulations**

Ce deuxième article est une investigation numérique avancée des paramètres de martelage et de l'application d'un algorithme d'optimisation SAO. À travers des centaines de simulations numériques de martelage, un des objectifs est d'obtenir des quantités mesurables (numériquement) permettant de caractériser l'avancement du martelage, et par la suite d'en faire l'optimisation. Cette approche est une intégration complexe et originale de plusieurs méthodes et technologies spécifiques à l'optimisation appliquée au martelage.

Plusieurs nouveautés ont été introduites à travers cet article. Avant de pouvoir établir un problème d'optimisation, il fallait tout d'abord établir quelles étaient les fonctions objectifs à optimiser. En utilisant les éléments finis ainsi que les résultats expérimentaux et théoriques établis ci-haut, nous avons constaté qu'une mesure adéquate de la qualité du martelage repose dans la caractérisation de l'état des contraintes résiduelles. Ceci est en accord avec d'autres travaux de la littérature. Conséquemment, nous avons proposé six (6) moniteurs de martelage basé sur l'état de contrainte résiduelle qui, une fois optimisés, donnent un état de contrainte sensiblement favorable à la prévention de l'amorce des fissures dans le matériau martelé. À ma connaissance, ces quantités n'ont jamais été introduites de manière concise pour le martelage auparavant.

Une fois les fonctions objectifs déterminées, et connaissant les principales variables de design (paramètres de martelage), nous avons implanté une procédure d'optimisation SAO qui consiste à approximer les fonctions objectifs par l'entremise d'un métamodèle. Ce métamodèle nous a permis d'obtenir numériquement, mais surtout rapidement, les variables de design donnant des fonctions objectifs tout en limitant le nombre de simulations par éléments finis (coûteuses en temps de calcul) à lancer. En effet, le nombre d'évaluations du métamodèle nécessaires pour résoudre le problème d'optimisation est de  $8.24 \times 10^5$  pour seulement 138 résultats de simulations par éléments finis. Chaque évaluation du métamodèle prend une fraction de seconde contre environ 30 minutes pour chaque simulation par éléments finis. Il est donc inconcevable d'imaginer une optimisation sans métamodèle.

Malgré que la procédure d'optimisation SAO existe depuis quelque temps déjà, jamais n'a-t-elle encore été appliquée au martelage, ni à un problème contenant autant de variables

objectifs et de design. En effet, étant donné la quantité importante de variables à prendre en considération, nous avons utilisé la notion statistique de *Bayesian Inference Criterion* (BIC) pour l'analyse des paramètres les plus influents. Cet élément nouveau dans l'optimisation SAO permet d'évaluer les variables en fonction non seulement de leur importance, mais aussi de leur impact sur la qualité du métamodèle généré par la méthode SAO et ce, de manière plus systématique qu'une analyse traditionnelle de variance ANOVA par exemple. Finalement, il est important de mentionner la procédure proposée pour le choix des approximations des solutions optimales. Étant donné l'espace en  $N$ -dimensions pour l'espace généré par les fonctions objectifs, il est impossible de déterminer une solution idéale basée sur un seul graphe puisque la solution est un plan en  $N > 3$  dimensions (un hyperplan). La technique utilisée est donc de générer  $N - 1$  sous-espaces, et de vérifier uniquement les approximations des solutions Pareto optimales dans chacun de ces sous-espaces.

### 3.0.3 Article 3 : Mechanical properties of 75% Ar / 25% CO<sub>2</sub> flux-cored arc welded E309L austenitic stainless steel

Ce troisième article est davantage à caractère expérimental, mais contient aussi une validation numérique. Cet article vise à déterminer les propriétés mécaniques de l'acier soudé et martelé, le E309L, lorsque soumis à ces conditions. Par la suite, il fallait déterminer le modèle constitutif adéquat à la fois en terme de simplicité et de justesse.

**Partie expérimentale :** Nous avons caractérisé les propriétés mécaniques du métal d'apport en traction uniaxiale, et ce, à des taux de chargement de  $10^{-3}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-1}$ ,  $10^0$  s<sup>-1</sup>. De plus, trois températures sont testées (25°C, 50°C et 100°C) afin d'ouvrir la possibilité du martelage à chaud. Étant donné la nature directionnelle des dépôts de soudure, trois orientations sont investiguées (0, 45° et 90°). De plus, la direction d'extraction de la chaleur lorsque le cordon de soudure se solidifie pourrait influencer les propriétés.

Toutefois, nous avons pu conclure que malgré la nature directionnelle du cordon de soudure, ses propriétés sont isotropes.

**Partie numérique :** Finalement, ce travail a permis de conclure qu'un modèle constitutif adéquat, de par sa simplicité et sa justesse, pour l'acier martelé E309L est le modèle de plasticité Johnson-Cook. L'implantation du modèle a été faite dans Abaqus (Abaqus/Standard, 2013) et les résultats expérimentaux ont servis à calibrer et valider le modèle.

Bien que significativement plus simple que le modèle présenté à l'Article 3.0.1, celui-ci ne tient pas compte du phénomène de chargement cyclique.

### 3.0.4 Article 4 : Trajectory optimization of industrial hammer peening of weld seams using sequential approximate optimization

Dans ce dernier article, on se concentre sur un autre aspect du procédé de martelage qui est la trajectoire sinusoidale du marteau le long du cordon de soudure. De manière similaire aux autres paramètres de martelage, les propriétés de la sinusoïde sont choisies de manières empiriques. Or, cette manière de procéder cause deux problèmes : (i) elle ne prend pas en considération les moniteurs de martelage décrit ci-haut, et (ii) une trajectoire sinusoidale mal calibrée peut entraîner un problème d'échantillonnage, mieux connu sous *aliasing*. Ce phénomène relevant du domaine de l'analyse fréquentielle est toutefois souvent omis dans l'analyse des procédés de martelage, mais peut être résolu en utilisant le théorème de Nyquist lors de la mise en place du problème d'optimisation SAO.

De plus, une observation importante concernant le premier problème a été de constater qu'une mesure expérimentale communément utilisée dans l'évaluation de la qualité du grenaillage, soit la couverture (%), ne semble pas être suffisante. En fait, nous avons observé que (i) l'hypothèse traditionnelle qu'une augmentation de la couverture augmente unilatéralement la qualité du processus semble erronée. En effet, selon les moniteurs de martelage, l'état des contraintes résiduelles semble légèrement diminuer avec une augmentation de la couverture, ce qui, en lien avec la littérature, rejoint une discussion de *overpeening*. (ii) De plus, nous avons constaté que la couverture de martelage est une quantité qui, à elle seule, ne caractérise pas complètement l'état de déformation observée. Nous avons donc introduit une nouvelle quantité - l'uniformité de martelage. Celle-ci semble évoluer linéairement avec l'augmentation de la couverture, mais beaucoup moins rapidement, ce qui porte à croire qu'une optimisation de l'uniformité pourrait être plus intéressante qu'une optimisation de la couverture de martelage.

# CHAPITRE 4 ARTICLE 1 : A UNIFIED PLASTICITY METHODOLOGY FOR RATE- AND TEMPERATURE-SENSITIVE ALLOYS EXHIBITING A NON-LINEAR KINEMATIC HARDENING BEHAVIOUR

J. Luk-Cyr, D. Paquet, J. Lantaigne, H. Champlaud, A. Vadean

\* The final publication is published in *Acta Mechanica Solida Sinica* and is in press at Elsevier via <http://dx.doi.org/10.1016/j.camss.2016.09.001>

## 4.1 Abstract

In this paper, a novel unified plasticity methodology is proposed to allow the coupling of rate- and temperature-sensitivity of engineering alloys as well as the non-linear kinematic hardening behaviour often observed during cyclic loading. The proposed methodology is general in the sense that an arbitrary constitutive model may be chosen for the viscoplastic part, as well as the cyclic part. We adapt our model with a physically-motivated viscoplasticity flow rule and a nonlinear kinematic hardening model. In contrast with other unified plasticity models, the simplified theory involves few material parameters that can be readily calibrated from standard mechanical tests. The capabilities of the proposed theory are demonstrated for a hot rolled annealed 304L stainless steel supplied by VI-Metal Peckover. The model is tested with stress-strain curves obtained from standard tensile and cyclic uniaxial tests at various strain amplitudes and strain-rates, and good accuracy of the response is obtained for strains up to 15%, within a temperature range of 293 – 673 K. We note that the cyclic plasticity model in our adapted theory can be readily enhanced with ratchetting, mean stress relaxation, strain amplitude history, Masing effects or other complex capabilities

## 4.2 Introduction

Stainless steels are ubiquitous in today's cutting-edge fabrication processes and structural design. For instance, austenitic stainless steels of the 300 series retain their high strength and ductility over a wide temperature range as well as provide an excellent resistance to corrosion and oxidation. These interesting properties make them favorable candidates for high performance applications such as aeronautic, nuclear fusion and fission facilities, and many more (Byun et al., 2004).

The behaviour of stainless steels has been studied for almost a century and extensive experimental results can be found in the literature. In the early work of Krempl (1979), the

rate-dependent response of a 304 stainless steel<sup>1</sup> was highlighted through room-temperature tensile tests at different strain-rates. Krempl (1979) found that, even at room-temperature, the response of the alloy could vary by up to 25% for strain-rates ranging from  $10^{-8}$  to  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$ . He also observed through cyclic loading at a strain amplitude of  $\pm 0.2\%$  that the well-known Bauschinger’s effect played an important role upon load reversal. These observations were since confirmed numerous times for various stainless steels such as in Kang et al. (2002c), Byun et al. (2004), Paquet (2006) and Paquet et al. (2012).

In light of these observations, constitutive modelling of stainless steels, or of any engineering alloy exhibiting both (i) a rate- and temperature-sensitivity and (ii) a non-linear kinematic hardening, requires the development of a predictive theoretical model encompassing these two distinct behaviours simultaneously. Such an approach at combining these behaviours is often referred to as a “unified plasticity theory” introduced, among others, by Slavic and Sehitoglu (1986), Chaboche and Nouailhas (1989b) and the references therein. Many variants of unified plasticity theories exist in the literature.

For instance, in Jr. et al. (2003), plastic flow was described through a piecewise-defined flow rule whose intervals were determined through an effective stress-based criterion. In their theory, the determination of the intervals where the piecewise function apply is done by adjusting the criterion based on experiments, which is not straightforward and requires extrapolation of the experimental data. A similar approach was proposed by Abdel-Karim and Ohno (2000), where the flow rule was instead given as a sum of effective stress-dependent subfunctions. These subfunctions are taken as “hypersphere surfaces” whose radii are governed by kinematic variables similar to those used in the classical cyclic hardening theory of Armstrong and Fredrick (1966). However, the large quantity of material parameters involved in their model limits its scope of application. In Kang et al. (2002d), viscoplasticity was coupled with a yield-type step function used to model cyclic hardening. A limitation of this model comes from this step function which limits the region where viscoplastic flow and non-linear kinematic hardening act simultaneously and therefore the rate- and temperature-sensitive behaviour. Similar limitations arise from the work of Ohno and Wang (1993) and Ohno and Wang (1994) where bilinear change of the backstress was used. Therefore, a well-defined methodology for combining aspects of the rate- and temperature-sensitive behaviour as well as cyclic kinematic hardening is required. Thereafter, an adapted theory for each plasticity mechanism can readily be chosen from a wide array of existing models such as in Zhu et al. (2015) and Jr. et al. (2002) (thermo-mechanical coupling), and Kang et al. (2011), Khutia et al. (2014), Khutia et al. and Chaboche (2008) (cyclic plasticity).

---

1. Annealed at  $1093^{\circ}\text{C}$  for 90 min.



The purpose of this paper is to present a well-defined unified-type plasticity methodology which combines aspects of the rate- and temperature-sensitive behaviour as well as cyclic behaviour. Thermodynamic considerations allow the coupled action of both plastic mechanisms simultaneously. We then choose simple constitutive equations : (i) the cyclic, kinematic hardening contribution is modeled using classical notions of backstress and effective stress and (ii) rate- and temperature-sensitive behaviour is modeled using a physically-motivated viscoplasticity flow rule. Our simplified theory leads to a constitutive model requiring few material parameters that can be readily calibrated from standard tensile tests ; a straightforward numerical plus experimental-based methodology is also proposed for determining the material parameters involved in the model. As an example, the experimental data for hot rolled annealed 304L austenitic stainless steel from Paquet (2006) and Paquet et al. (2012) are used to calibrate and test the specialized theory. We point out that the objective of this paper is not to determine the best constitutive model for each plastic mechanism, but to lay out a methodology from which one can choose the one that suits best. Our choice of a simple nonlinear kinematic hardening model, although simple in its calibration and useful in specific loading conditions, is limited when describing complex phenomena such as ratchetting, mean stress relaxation or Masing's effects, where models such as Jiang and Sehitoglu (1996), Khutia et al., Do et al. (2015) or Kang et al. (2011) should be used.

The paper is structured as follows. The proposed unified plasticity methodology is presented in Section 4.3. The adapted theory is then applied to an austenitic stainless steel 304L, previously characterized by Paquet and co-workers (Paquet et al., 2012; Paquet, 2006). In Section 4.4.1, the model is first calibrated from uniaxial tensile tests data obtained at various temperatures but fixed strain-rate. Then, we investigate the room temperature rate-dependent behaviour with four different strain-rates so as to calibrate the remaining material parameters. The model is then tested in Section 4.4.2 with cyclic stress-strain data with different strain amplitudes and strain-rates. Finally, a conclusion is given in Section 4.5.

### 4.3 Unified plasticity constitutive methodology

The unified plasticity methodology proposed for combining the constitutive behaviour of metals exhibiting rate- and temperature-sensitivity as well as cyclic hardening is developed in this section. This constitutive model involves the following main governing variables : (i) the Cauchy stress  $\mathbf{T}$ , (ii) the backstress  $\mathbf{T}_{\text{back}}$ , arising from the material's non-linear kinematic hardening behaviour, and (iii) the absolute temperature  $\vartheta$ . For simplicity, isothermal conditions are assumed. However, the proposed constitutive equations can be readily extended to the non-isothermal case.

### 4.3.1 Strain additive decomposition

The deformation of metals is assumed to be decomposable as (i) an “elastic” deformation due to stretching and rotation of the underlying microstructure and (ii) a “plastic” deformation which, at low homologous temperatures, represents the rate- and temperature-sensitive response of the material as well as the experimentally-observed non-linear kinematic hardening (often referred to as the Bauschinger’s effect). In other words, this small deformation theory is based on the kinematic decomposition of the infinitesimal strain tensor  $\mathbf{E}$  into the elastic  $\mathbf{E}^e$  and plastic  $\mathbf{E}^p$  parts :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p, \quad (4.1)$$

where

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right]. \quad (4.2)$$

Consistent with most plasticity theories, it is assumed that plastic flow does not induce changes in volume,  $\mathbf{E}^p$  is deviatoric ( $\text{tr } \mathbf{E}^p = 0$ ).

### 4.3.2 Helmholtz free energy

Under isothermal conditions, the free energy imbalance (Gurtin et al., 2010) is :

$$\dot{\psi} - \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}^e - \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}^p \leq 0, \quad (4.3)$$

where  $\psi$  is the Helmholtz free energy and  $\mathbf{T}$  is the Cauchy stress.

Unlike conventional elastic-plastic theories where the free energy  $\psi$  is assumed to be purely elastic, the non-linear kinematic hardening is introduced in the proposed model through a free energy associated with the plastic flow. Hence, we assume that the Helmholtz free energy has the form (e.g. Jirasek and Bazant (2001))

$$\psi = \psi^e + \psi^p, \quad (4.4)$$

with  $\psi^e$  a purely elastic energy, and  $\psi^p$  a defect energy related to plastic flow. Particular expressions for  $\psi^e$  and  $\psi^p$  are given next.

### Elastic part of the free energy

We limit our investigation to isotropic materials. Hence, the elastic part of the free energy is given by

$$\psi^e = \hat{\mu}(\vartheta) (\mathbf{E}_0^e)^2 + \frac{1}{2} \hat{\kappa}(\vartheta) (\text{tr } \mathbf{E}^e)^2, \quad (4.5)$$

where  $\hat{\kappa}(\vartheta) > 0$  and  $\hat{\mu}(\vartheta) > 0$  are the Lamé's constants for the temperature-dependent bulk and shear moduli, respectively. The subscript  $(\cdot)_0$  in (4.5) represents the deviatoric part of a tensor.

The Cauchy stress is then obtained by differentiating the elastic part of the free energy with respect to the elastic strain tensor :

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{E}^e} = 2\hat{\mu}(\vartheta) \mathbf{E}_0^e + \hat{\kappa}(\vartheta) (\text{tr } \mathbf{E}^e) \mathbf{1}, \quad (4.6)$$

where  $\mathbf{1}$  stands for the second order identity tensor.

### Plastic part of the free energy

The defect energy  $\psi^p$  is assumed to follow a simple quadratic function :

$$\psi^p = \frac{1}{2} B |\mathbf{A}|^2, \quad (4.7)$$

where  $B > 0$  is a constant and  $\mathbf{A}$  is a dimensionless symmetric and deviatoric internal variable characterizing kinematic hardening effects. Herein, consideration of a simple non-linear kinematic hardening rule is classically introduced via a dynamic recovery term. In this perspective, we assume the following evolution equation for the kinematic variable  $\mathbf{A}$  :

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{E}}^p - \gamma \mathbf{A} \dot{\gamma}^p, \quad (4.8)$$

with  $\gamma \geq 0$ , the dynamic recovery constant, which is in the standard non-linear dynamic recovery form of Armstrong and Fredrick (1966). As discussed previously, several hardening models exist in the literature which are better at describing other phenomena such as ratcheting, mean stress effects and plastic strain history. The proposed methodology however is general in the sense that the evolution equation for the kinematic variable (4.8) can be readily enhanced. For instance, following Ohno and Wang (1993) in their description of ratcheting, (4.8) would be of the form

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{\gamma}^p \left[ C - \gamma \left( \frac{f(\mathbf{A})}{r} \right)^m \right] \mathbf{A}, \quad (4.9)$$

where  $C, r, m$  are material constants and  $f(\mathbf{A}) = \sqrt{3/2}|\mathbf{A}|$ . In our case, the choice of a simple nonlinear kinematic hardening theory was chosen for its simplicity. Next, the equivalent shear plastic strain rate is

$$\dot{\bar{\gamma}}^p = \sqrt{2}|\dot{\mathbf{E}}^p|, \quad (4.10)$$

from which the total equivalent shear plastic strain is obtained :

$$\bar{\gamma}^p = \int_0^t \dot{\bar{\gamma}}^p d\zeta. \quad (4.11)$$

On account of (4.10), the plastic strain-rate tensor  $\dot{\mathbf{E}}^p$  may be expressed in terms of a magnitude and a direction :

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \sqrt{1/2} \dot{\bar{\gamma}}^p \mathbf{N}^p, \quad \text{with} \quad \mathbf{N}^p = \frac{\dot{\mathbf{E}}^p}{|\dot{\mathbf{E}}^p|}, \quad (4.12)$$

where  $\mathbf{N}^p$  is the direction of plastic flow, whenever  $|\dot{\mathbf{E}}^p| \neq 0$ . The direction of plastic flow  $\mathbf{N}^p$  stems from the principle of maximum dissipation, and is derived in Section 4.3.3, while its magnitude  $\dot{\bar{\gamma}}^p$  must be specified with an appropriate physically-motivated rate-dependent plasticity (or viscoplasticity) flow rule (cf. Section 4.3.4).

### 4.3.3 Direction of plastic flow

As stated above, the direction of plastic flow is derived from the principle of maximum dissipation (cf., Gurtin et al. (2010)). First, eqns. (4.4), (4.6), (4.7) and (4.8) are introduced in the the free energy imbalance (4.3) to obtain the following inequality :

$$(\mathbf{T}_0 - B\mathbf{A}) : \dot{\mathbf{E}}^p + \gamma B |\mathbf{A}|^2 \dot{\bar{\gamma}}^p \geq 0, \quad (4.13)$$

where  $\mathbf{T}_0$  is the deviatoric part of the Cauchy stress. Defining a backstress<sup>2</sup>

$$\mathbf{T}_{\text{back}} = B\mathbf{A}, \quad (4.14)$$

and an effective stress

$$\mathbf{T}_{\text{eff}} = \mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_{\text{back}}, \quad (4.15)$$

---

2. It seems more natural to define the backstress as a stress-like quantity used to represent kinematic hardening rather than simply a dimensionless internal variable.

which is symmetric and deviatoric, eqn. (4.13) reduces to the following dissipation inequality :

$$\mathcal{D} = \mathbf{T}_{\text{eff}} : \dot{\mathbf{E}}^p + \gamma B |\mathbf{A}|^2 \dot{\gamma}^p \geq 0, \quad (4.16)$$

with  $\mathcal{D}$ , the dissipation. Applying the principle of maximum dissipation to (4.16), it is found that the plastic flow  $\dot{\mathbf{E}}^p$  must be codirectional with the effective stress  $\mathbf{T}_{\text{eff}}$  for the stress power  $\mathbf{T}_{\text{eff}} : \dot{\mathbf{E}}^p$  to be maximal. Hence,

$$\mathbf{N}^p = \frac{\dot{\mathbf{E}}^p}{|\dot{\mathbf{E}}^p|} = \frac{\mathbf{T}_{\text{eff}}}{|\mathbf{T}_{\text{eff}}|}. \quad (4.17)$$

This result is comparable to those in existing unified plasticity theories where, although not explicitly mentioned, it is assumed that the component of plastic flow is codirectional with the effective stress  $\mathbf{T}_{\text{eff}}$ .

We further define

$$\bar{\tau}_{\text{eff}} = \sqrt{1/2} |\mathbf{T}_{\text{eff}}|, \quad (4.18)$$

as the scalar equivalent effective shear stress. Substituting eqns. (4.10) and (4.18) in (4.16), the dissipation inequality becomes

$$\mathcal{D} = (\bar{\tau}_{\text{eff}} + \gamma B |\mathbf{A}|^2) \dot{\gamma}^p \geq 0. \quad (4.19)$$

In the next section, we introduce a physically-motivated viscoplasticity flow rule for  $\dot{\gamma}^p$  which will complete the theory.

#### 4.3.4 Viscoplasticity theory

In order to model the rate-dependent plastic (or viscoplastic) flow, we adopt the constitutive relations proposed by Balasubramanian and Anand (2002) which have proven successful in representing metal behaviour in the temperature range  $\vartheta \leq 0.35 \vartheta_m$ , with  $\vartheta_m$  the melting temperature. The most recent developments of such relations for the motion of dislocations may be found in Kocks (1976) and Frost and Ashby (1982), and are simply summarized here.

For low homologous temperatures, plastic flow in crystalline metals is usually controlled by the thermally-activated motion of dislocations past obstacles on the slip planes. More specifically, two main barriers resist plastic flow : thermally-activatable barriers, which can be overcome at high enough temperatures, and athermal barriers, those that cannot. Accordingly, two stress-dimensioned internal variables are introduced in the model :  $S^*$ , which represents a resistance due to thermally-activatable barriers and  $S_a$ , which represents ather-

mal barriers to plastic flow<sup>3</sup>. The equivalent viscoplastic shear strain rate is then defined as follows :

$$\dot{\gamma}^p = \begin{cases} 0 & \text{if } \bar{\tau}_* \leq 0, \\ \dot{\gamma}_0 \exp \left\{ - \left( \frac{\Delta G_0}{k_B \vartheta} \right) \left[ 1 - \left( \frac{\bar{\tau}_*}{S^*} \right)^p \right]^q \right\} & \text{if } 0 < \bar{\tau}_* < S^*, \end{cases} \quad (4.20)$$

with

$$\bar{\tau}_* = \bar{\tau}_{\text{eff}} - S_a. \quad (4.21)$$

In (4.20),  $\dot{\gamma}_0$  is a reference shear strain rate of the order of  $10^6 - 10^7 \text{ s}^{-1}$ ,  $k_B$  is the Boltzmann constant,  $S_a$  and  $S^*$  are the athermal and thermally-activatable resistances, respectively,  $\Delta G_0$  is the initial activation energy when  $\bar{\tau}_* = 0$  so that the energy barrier is lowered from its initial value  $\Delta G_0$  when  $\bar{\tau}_* > 0$ , and  $p$  and  $q$  are barrier shape parameters with values in the range

$$p \in [0, 1]; \quad q \in [1, 2]. \quad (4.22)$$

This equation is believed to represent some probability of a dislocation moving past an obstacle, or barrier, given an energy. Furthermore, the resistance parameter  $S^*$  is taken to be rate-dependent<sup>5</sup> and to evolve according to the following phenomenological form

$$S^* = S_0^* + \left( \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_{0,s}} \right), \quad (4.23)$$

where  $S_0^*$  and  $\dot{\gamma}_{0,s}$  are additional material parameters and  $\dot{\gamma}$  is the equivalent shearing rate.

Note that although this phenomenological form is chosen for the viscoplastic flow, alternative theories could be used to better describe other behaviours, such as for instance, isotropic hardening. As described in Chaboche (2008), possibilities for introducing a specific hardening model of the isotropic type in a rate-dependent viscoplastic case, include adding a one-to-one relationship of the yield surface size and drag stress on the equivalent plastic strain. In our particular case, this would mean adding a dependency of  $S_a$  and  $S^*$ , respectively, on the equivalent plastic strain.<sup>6</sup> A coupling between the evolution equation for the kinematic variable (4.8) and the equivalent plastic strain is also possible.

---

3. Examples of thermally-activatable barriers are resistance due to point defects such as vacancies or the resistance itself, also known as Peierls resistance. Examples for athermal barriers are farfield forests of dislocations or elastic-stress due to grain boundaries (Nemat-Nasser, 2004).

4. Originally,  $\bar{\tau}_* = \bar{\tau} - S_a$ . However, codirectionality of the plastic flow with the effective stress  $\mathbf{T}_{\text{eff}}$  (cf. (4.17)) motivates such a modification and is believed not to alter the physical statement significantly.

5. As initially suggested in Balasubramanian and Anand (2002)

6. This however, would change the physical meaning of the model.

## 4.4 Numerical example

As an example, the unified plasticity theory presented in Section 4.3 is applied to a hot rolled annealed 304L stainless steel provided by VI-Metal Peckover. This alloy was previously studied by Paquet and co-workers (Paquet, 2006; Paquet et al., 2012) and details regarding the different mechanical tests performed and corresponding experimental set-ups may be found therein. For completeness of this work, and to investigate the rate-sensitivity and cyclic behaviour, additional room temperature uniaxial tensile experiments at various strain rates and cyclic experiments were carried on samples made from the same material.

The calibration procedure used to determine the material parameters is first outlined in Section 4.4.1. Then, the simplified constitutive model is tested in Section 4.4.2 with room temperature cyclic stress-strain experiments performed at varying strain amplitudes and strain-rates.

### 4.4.1 Calibration of material parameters

The calibration procedure consists in determining the material parameters from standard mechanical tests :

- (a) Determination of  $\{\hat{\mu}(\vartheta), \hat{\kappa}(\vartheta)\}$  from the elastic portion of uniaxial tensile tests performed at different temperatures  $\vartheta$ . The Poisson's ratio was taken as 0.3 ;
- (b) Determination of  $\{\dot{\gamma}_0, \Delta G_0, p, q, S_a, S^*\}$  using tensile yield strength vs temperature data at a fixed strain-rate (and thus a fixed  $S^*$ ) ;
- (c) Determination of  $\{B, \gamma\}$  using stress vs strain curves at a fixed strain-rate but varying temperatures ; and
- (d) Determination of the evolution equation for  $S^*$  using room temperature stress vs strain curves at varying strain-rates.

### Elastic properties

Young's modulus of the 304L stainless steel studied in this paper was measured by Paquet et al. (2012) for temperatures ranging from 293 to 1473 K. Based on their results, and assuming a constant Poisson's ration  $\nu = 0.3$ , it is found that the shear and bulk moduli,  $\mu$  and  $\kappa$ , decrease by as much as 70% of their room-temperature values when heated to  $\approx 1500$  K. Therefore, consideration of such variations is necessary for an accurate description of the viscoplastic response of this material. Polynomial functions are fitted to the data, as shown in Fig.4.1(a)-(b), and used throughout this paper.

## Viscoplastic properties

Next, the material parameters involved in the viscoplasticity flow rule (4.20) are determined. The flow parameters  $\{\dot{\gamma}_0, \Delta G_0, p, q, S_a, S^*\}$  influence the rate- and temperature-sensitivity of the material and were calibrated as follows :

- (1) For a set of given  $\{\dot{\gamma}_0, \Delta G_0, p, q, S_a, S^*\}$ , the 0.2% offset yield strength obtained for uniaxial tensile simulations at different temperatures, but fixed strain-rate, are computed. In this step, the resistance parameter  $S^*$  does not vary since the loading strain-rate remains constant ;
- (2) The simulation's results are then compared against the experimental traction data of Paquet et al. (2012) obtained under identical loading conditions ; and
- (3) The process is repeated until a single set of parameters can reproduce the experimental data for a desired temperature range.

The flow parameters obtained from this procedure are given in Table 4.1, while the corresponding fit against the experimental data is shown in Fig. 4.1(c). The value of the activation energy  $\Delta G_0$  is expected to be constant and typically lies in the range

$$0.05 \leq \frac{\Delta G_0}{\mu b^3} \leq 2, \quad (4.24)$$

where  $b \approx 0.252$  nm is a typical length of the burgers vector for stainless steel 304L (Kocks, 1976). The value of  $\Delta G_0$  is taken to be in that range.

## Hardening properties

To calibrate the hardening material properties, our constitutive model is implemented in Abaqus/Standard 6.13 through a user-element material subroutine (UEL). Then, using the material properties in Table 4.1, the hardening parameters  $\{B, \gamma\}$  are calibrated following a procedure similar to that of Section 4.4.1.

- (1) For a set of given  $\{B, \gamma\}$ , uniaxial tensile simulations at different temperatures, but fixed strain-rate, are computed ;
- (2) The simulation's results are then compared against the experimental data of Paquet et al. (2012) obtained under identical loading conditions ; and
- (3) The process is repeated until a single set of parameters can reproduce the experimental data for a desired temperature range.

In engineering applications where strains may reach  $\approx 10\%$ , it is reasonable to assume the existence of a work hardening mechanism for  $B$  which depends on the deformation history.



Tableau 4.1 Viscoplastic properties for stainless steel 304L. Experimental data of Paquet et al. (2012)

$\Delta G_0$ (J)	$\dot{\gamma}_0$ (s <sup>-1</sup> )	$p$	$q$	$S_a$ (MPa)
$2.5 \times 10^{-19}$	$4.8 \times 10^6$	0.5	1.7	65

As a simple approximation, the Bauschinger variable  $B$  is chosen to evolve as a function of the equivalent plastic shear strain  $\bar{\gamma}^p$  according to a simple power-law :

$$B = B_0 + K (\bar{\gamma}^p)^n, \quad (4.25)$$

where  $B_0$  is the initial value for  $B$ , and  $K$  and  $n$  are hardening coefficients.

The hardening parameters obtained from this procedure are given in Tables 4.2 and 4.3, while the corresponding fit against the experimental data is shown in Fig. 4.2 for strains up to 15%. We found that the Bauschinger coefficient  $B_0$  decreases with increasing temperatures, which is consistent with other observations in the literature (e.g. Jr. et al., 2003). We note that in our model, only  $B_0$  varies with temperature while the dynamic recovery term  $\gamma$  and hardening variables  $K, n$  remain constant for the range of temperature studied.

### Rate sensitivity

Finally, to determine the material parameters in (4.23), room temperature uniaxial traction experiments were carried out at various strain-rates following the same procedure as in Paquet (2006) and Paquet et al. (2012). The material parameters  $S_0^*$  and  $\dot{\gamma}_{0,s}$  were then obtained by using the calibrated values from Section 4.4.1 and 4.4.1, and fitting the curves, as shown in Fig. 4.3 for four different strain-rates. Table 4.4 lists the fitted material parameters.

### 4.4.2 Results and discussion

The elastic, viscoplastic and hardening material parameters of a 304L stainless steel have been determined in Section 4.4.1 based on the experimental data of Paquet (2006), Paquet et al. (2012) and standard traction experiments at various strain rates. The adapted theory is now tested with room temperature cyclic stress-strain experiments at varying strain amplitudes  $\varepsilon_a$  and strain-rates, obtained by Paquet (2006). In these experiments, the loading frequency was

Tableau 4.2 Constant hardening parameters for stainless steel 304L. Experimental data of Paquet et al. (2012)

$\gamma$	$K$ (GPa)	$n$
175	100	0.6

Tableau 4.3 Temperature-dependent hardening parameters for stainless steel 304L. Experimental data of Paquet et al. (2012)

$\vartheta$ (K)	$B_0$ (GPa)
293	5.00
473	0.50
673	0.45

fixed at  $f = 2$  Hz and various strain amplitudes were tested. The samples were cycled until the stress-strain response showed a saturation, which was reported. Table 4.5 summarizes the range of strain amplitudes  $\varepsilon_a$  and corresponding strain-rates  $\dot{\varepsilon}$  used in the experiments. Using the material parameters previously reported in Tables 4.1 through 4.4, predictions of the proposed model implemented in Abaqus/Standard 6.13 through a UEL are compared with the experimental data, as shown in Fig. 4.4. In addition, constant strain amplitude (0.5% and 0.8%, respectively) cyclic stress-strain curves are shown until saturation in Fig. 4.5 for a nominal strain-rate of  $\dot{\varepsilon} = 2 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ . Details of the numerical implementation are given in the Appendix.

It can be observed that in this simple loading case our choice of a simple nonlinear kinematic hardening may reproduce the experimental results with reasonable accuracy. However, we point out the limitations of this cyclic hardening model, which was chosen for its simplicity, and refer to more modern theories such as in Chaboche (2008) and Khutia et al.. Furthermore, additional experiments should be conducted to both validate the viscoplastic flow rule, and give indications as to which cyclic hardening model would best suit the given material response. Such experiments should include thermomechanical loadings (cf. Jr. et al.

Tableau 4.4 Material parameters for the rate-dependent resistance  $S^*$ 

$S_0^*$ (MPa)	$\dot{\gamma}_{0,s}$ ( $s^{-1}$ )
364	$1.075 \times 10^{-4}$

Tableau 4.5 Cyclic loading experiments of Paquet (2006) at room temperature for stainless steel 304L

$\varepsilon_a$ (%)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\dot{\varepsilon}$ ( $s^{-1}$ )	$5 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-3}$	$1.5 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-3}$	$2.5 \times 10^{-3}$	$3 \times 10^{-3}$	$3.5 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^{-3}$

(2002), Jiang and Sehitoglu (1996), Slavic and Sehitoglu (1986)) and cyclic creep test or ratcheting test with non-zero mean stress since they may bring unexpected features requiring modifications to the constitutive model.

## 4.5 Conclusion

In conclusion, a unified plasticity methodology has been presented for combining aspects of the rate- and temperature-dependent behaviour as well as nonlinear cyclic response. The proposed methodology is general in the sense that the constitutive equation for the kinematic variable may be freely modified in order to take into account complex phenomena such as ratcheting, mean stress relaxation, plastic strain amplitude history, cyclic softening, Masing effects, etc.

A physically-based adapted theory has been implemented and applied to a hot rolled annealed austenitic stainless steel 304L. The often overlooked viscoplasticity flow rule in unified plasticity models is now substituted with a more physically-motivated thermally-activated theory (Kocks, 1976) without introducing a large amount of material parameters. The cycling behaviour is considered through a simple nonlinear kinematic variable whose rate includes a dynamic recovery term which depends on viscoplastic deformation. The proposed model is capable of reproducing both the non-linear kinematic hardening arising in uniaxial cyclic loading and the rate- and temperature-sensitive traction response of 304L stainless steel for deformations up to 15% and temperatures in the range of 293 – 673K .

Furthermore, a straightforward methodology for determining the viscoplastic and hardening material parameters is proposed which consists of three steps : (i) comparison with experimental yield strength vs temperature curves at a fixed strain-rate; (ii) comparison with experimental stress vs strain curves at a fixed strain-rate, but varying temperatures, and; (iii) comparison with experimental room temperature stress vs strain curves with varying strain-rates. The theory is tested with experimental cyclic stress-strain curves at different strain amplitudes and strain-rates and reasonable agreement is obtained. Our adapted model however is limited in its application due to the simplicity of the cyclic kinematic variable, which may be readily enhanced as mentioned previously. Additional experiments such as thermomechanical loadings and cyclic-creep experiments are required in order to adequately choose the cyclic constitutive model.

#### **4.6 Acknowledgements**

The authors would like to thank the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC), Hydro-Québec, and Alstom for their financial support.

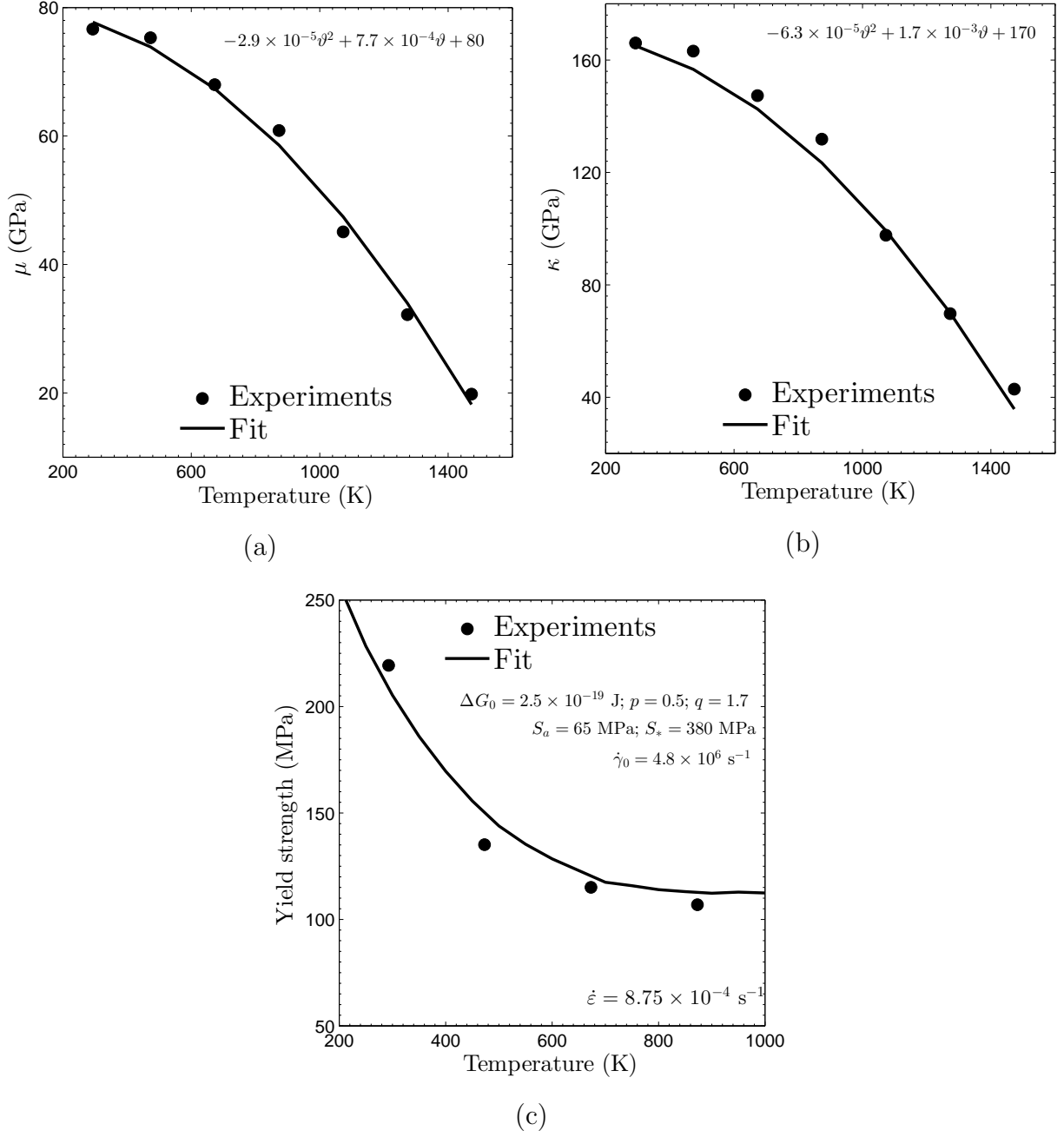


Figure 4.1 Temperature ( $\vartheta$ ) dependence of the (a) shear modulus  $\mu$ ; (b) bulk modulus  $\kappa$  — a simple polynomial expression is fitted to the experimental data of Paquet et al. (2012) for stainless steel 304L using a least-square method; and (c) 0.2% offset yield at a fixed strain-rate  $\dot{\epsilon} = 8.75 \times 10^{-4}$  s $^{-1}$  (Paquet et al., 2012). The fit of the calibrated model to the data is shown

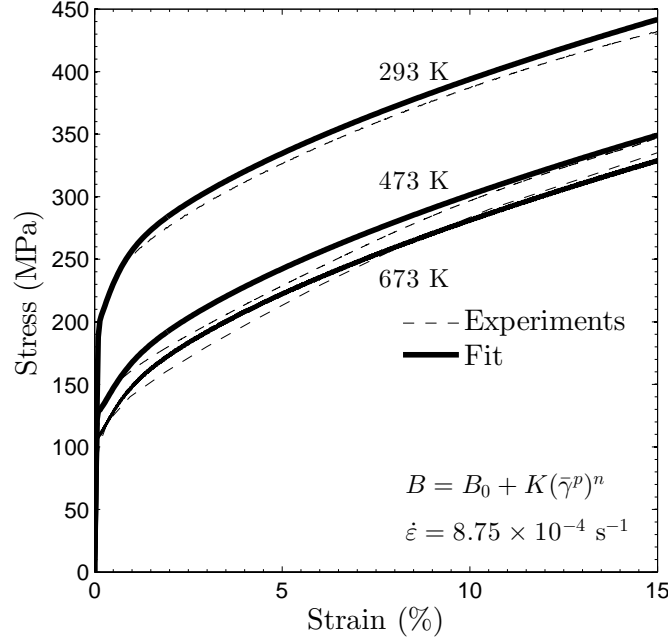


Figure 4.2 Experimental data of the stress-strain response of stainless steel 304L at different temperatures but fixed strain-rate  $\dot{\epsilon} = 8.75 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  (Paquet et al., 2012). The fit of the model to the data is shown. The dynamic recovery term  $\gamma = 175$ , the work-hardening parameter  $K = 100 \text{ GPa}$  and exponent  $n = 0.6$  are constant for all curves and given in Table 4.2. The  $B_0$  coefficients are given in Table 4.3

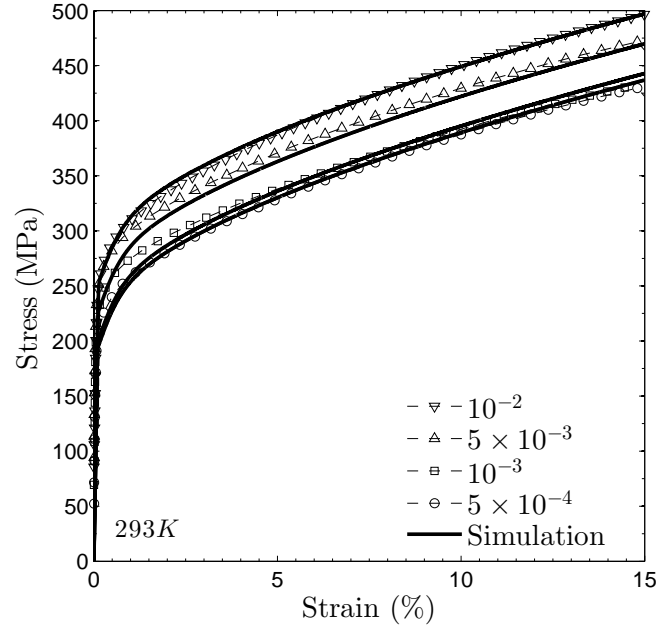


Figure 4.3 Experimental data of the stress-strain response of stainless steel 304L at different strain-rates but fixed temperature  $\vartheta = 293 \text{ K}$ . The fit of the model to the data is shown

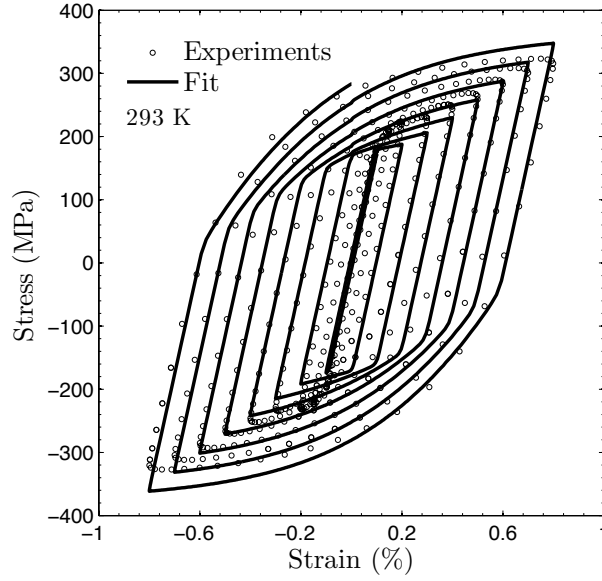


Figure 4.4 Experimental data of Paquet (2006) for the room temperature cyclic stress-strain response of stainless steel 304L at various strain amplitudes and strain-rates (cf. Table 4.5). The fit of the model with calibrated material parameters to the data is shown. Remark : The experimental data shown are sampled from the actual data for visualization

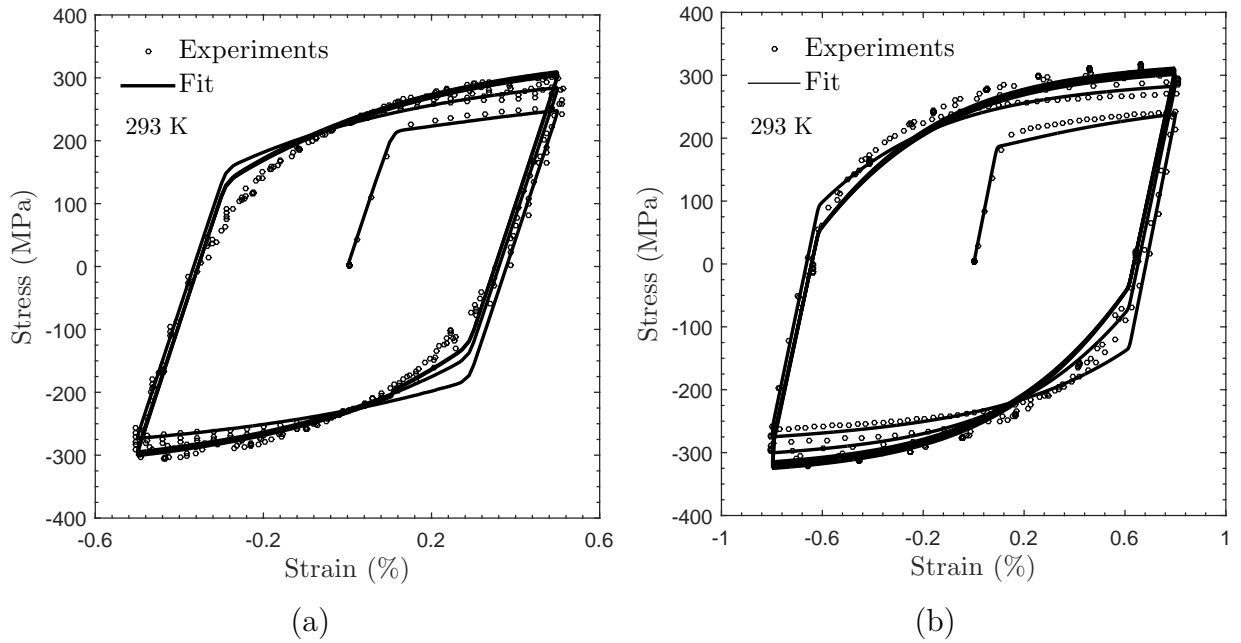


Figure 4.5 Room temperature cyclic stress-strain response at nominal strain-rate  $\dot{\epsilon} = 2 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  and strain amplitude (a) 0.5%; and (b) 0.8%. Remark : The experimental data shown are sampled from the actual data for visualization

#### 4.7 Time-integration procedure

In this section, we present a semi-implicit time integration procedure for the theory presented in this paper designed for implementation in a user-defined element subroutine in Abaqus/Standard (UEL).

Let  $[0, T] \in \mathbb{R}$  be the time interval of interest. We assume that at time  $t_n \in [0, T]$ , we are given

$$\{\mathbf{E}_n^p, \mathbf{T}_n, \mathbf{T}_{\text{back},n}, \mathbf{A}_n, B_n, \bar{\gamma}_n^p\}, \quad \text{as well as} \quad \mathbf{E}_n \quad \text{and} \quad \Delta \mathbf{E}_n, \quad (4.26)$$

where  $\Delta \mathbf{E}_n$  is a strain increment presumed to occur over a time interval  $\Delta t$ , the time increment-integration procedure in this strain-driven problem is then to calculate

$$\{\mathbf{E}_{n+1}^p, \mathbf{T}_{n+1}, \mathbf{T}_{\text{back},n+1}, \mathbf{A}_{n+1}, B_{n+1}, \bar{\gamma}_{n+1}^p\}, \quad \text{at time} \quad t_{n+1} = t_n + \Delta t, \quad (4.27)$$

and march forward in time.

We begin by writing the flow rule in the following generic form

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \sqrt{1/2} \dot{\gamma}^p \mathbf{N}^p, \quad \mathbf{N}^p = \sqrt{1/2} \frac{\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_{\text{back}}}{\bar{\tau}^{\text{eff}}}, \quad (4.28)$$

and integrate the evolution equation for  $\mathbf{E}^p$  according to an implicit backward-Euler time-integration procedure

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{n+1}^p &= \mathbf{E}_n^p + \sqrt{1/2} \Delta \bar{\gamma}^p \mathbf{N}_{n+1}^p, \\ \bar{\gamma}_{n+1}^p &= \bar{\gamma}_n^p + \Delta \bar{\gamma}^p, \\ \mathbf{A}_{n+1} &= \mathbf{A}_n + \sqrt{1/2} \Delta \bar{\gamma}^p \mathbf{N}_{n+1}^p - \gamma \Delta \bar{\gamma}^p \mathbf{A}_{n+1}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Rearranging (4.29)<sub>3</sub>,

$$\mathbf{A}_{n+1} = \eta (\mathbf{A}_n + \Delta \mathbf{E}^p), \quad (4.30)$$

with

$$\eta = \frac{1}{1 + \gamma \Delta \bar{\gamma}^p}. \quad (4.31)$$

Then, using the constitutive equation for the stress

$$\mathbf{T} = \mathbb{C} [\mathbf{E} - \mathbf{E}^p], \quad \mathbb{C} = 2\mu \mathbb{I} + \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad (4.32)$$



the stress at the end of the time step is

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{n+1} &= \mathbb{C} [\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_{n+1}^p], \\
&= \mathbb{C} \left[ \mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n^p - \sqrt{1/2} \Delta \bar{\gamma}^p \mathbf{N}_{n+1}^p \right], \\
&= \mathbb{C} \mathbf{E}_{\text{trial}}^e - \sqrt{2} \mu \Delta \bar{\gamma}^p \mathbf{N}_{n+1}^p.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Let

$$\mathbf{T}_{\text{trial}} = \mathbb{C} \mathbf{E}_{\text{trial}}^e, \tag{4.34}$$

define a trial stress, and

$$\mathbf{E}_{\text{trial}}^e = \mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n^p, \tag{4.35}$$

define a trial elastic strain; from a physical standpoint, the trial stress is obtained by freezing the plastic flow during the time step. Then, substituting (4.34) into (4.33),

$$\mathbf{T}_{n+1} = \mathbf{T}_{\text{trial}} - \sqrt{2} \mu \Delta \bar{\gamma}^p \mathbf{N}_{n+1}^p. \tag{4.36}$$

Let

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{\text{trial}}^{\text{eff}} &= (\mathbf{T}_{\text{trial}})_0 - \mathbf{T}_{\text{back},n}, \\
\bar{\tau}_{\text{trial}}^{\text{eff}} &= \sqrt{1/2} |\mathbf{T}_{\text{trial}}^{\text{eff}}|,
\end{aligned} \tag{4.37}$$

define a trial effective shear stress and a trial equivalent effective shear stress, respectively.

For a “plastic step” to occur, that is for  $\Delta \mathbf{E}^p > 0$ , the viscoplastic threshold

$$\bar{\tau}_{\text{trial}}^{\text{eff}} > S_a, \tag{4.38}$$

must be satisfied, for otherwise the step is “elastic”.

Presume now that we have a plastic step so that  $\Delta \mathbf{E}^p > 0$ . Then, using (4.29) and (4.36), the effective stress at the end of the increment may be written as

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{n+1}^{\text{eff}} &= (\mathbf{T}_{n+1})_0 - \mathbf{T}_{\text{back},n+1}, \\
&= (\mathbf{T}_{\text{trial}})_0 - \sqrt{2} \mu \Delta \bar{\gamma}^p \mathbf{N}_{n+1}^p - \eta B_{n+1} (\mathbf{A}_n + \Delta \mathbf{E}^p), \\
&= [(\mathbf{T}_{\text{trial}})_0 - \eta B_{n+1} \mathbf{A}_n] - \left( \sqrt{2} \mu + \eta \sqrt{1/2} B_{n+1} \right) \Delta \bar{\gamma}^p \mathbf{N}_{n+1}^p.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

From this point on, we choose a semi-implicit time-integration procedure and use the Bau-

schinger variable at time  $t_n$ , instead than at time  $t_{n+1}$ <sup>7</sup>, so that

$$\mathbf{T}_{n+1}^{\text{eff}} = [(\mathbf{T}_{\text{trial}})_0 - \eta B_n \mathbf{A}_n] - \left( \sqrt{2}\mu + \eta \sqrt{1/2} B_n \right) \Delta \bar{\gamma}^p \mathbf{N}_{n+1}^p. \quad (4.40)$$

Let

$$\mathbf{T}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta} = (\mathbf{T}_{\text{trial}})_0 - \eta B_n \mathbf{A}_n, \quad (4.41)$$

so that

$$\mathbf{T}_{n+1}^{\text{eff}} = \mathbf{T}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta} - \left( \sqrt{2}\mu + \eta \sqrt{1/2} B_n \right) \Delta \bar{\gamma}^p \mathbf{N}_{n+1}^p. \quad (4.42)$$

Now, by (4.28), the effective stress at the end of the time increment may also be written as

$$\mathbf{T}_{n+1}^{\text{eff}} = \sqrt{2} \bar{\tau}_{n+1}^{\text{eff}} \mathbf{N}_{n+1}^p. \quad (4.43)$$

Next, define a trial direction of plastic flow at the end of the step by

$$\mathbf{N}_{\text{trial}}^p = \sqrt{1/2} \frac{\mathbf{T}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta}}{\bar{\tau}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta}}, \quad (4.44)$$

so that

$$\mathbf{T}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta} = \sqrt{2} \bar{\tau}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta} \mathbf{N}_{\text{trial}}^p. \quad (4.45)$$

Using (4.43) and (4.45), (4.42) becomes

$$\left( \sqrt{2} \bar{\tau}_{n+1}^{\text{eff}} + \left( \sqrt{2}\mu + \eta \sqrt{1/2} B_n \right) \Delta \bar{\gamma}^p \right) \mathbf{N}_{n+1}^p = \sqrt{2} \bar{\tau}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta} \mathbf{N}_{\text{trial}}^p, \quad (4.46)$$

which immediately gives that :

- (1) The direction of plastic flow at the end of the step is given by :

$$\mathbf{N}_{n+1}^p = \mathbf{N}_{\text{trial}}^p. \quad (4.47)$$

and ;

- (2) The equivalent effective shear stress at the end of the step and the trial value of the equivalent effective shear stress are related by

$$\bar{\tau}_{n+1}^{\text{eff}} = \bar{\tau}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta} - \left( \mu + \frac{1}{2} \eta B_n \Delta \bar{\gamma}^p \right) \quad (4.48)$$

Next, using the flow rule together with (4.48), the plastic increment  $\Delta \bar{\gamma}^p$  is obtained by

---

7. This approximation simplifies calculation, but requires sufficiently small time steps.

solving iteratively the following non-linear equation

$$\Delta t \dot{\gamma}_0 \exp \left( -\frac{\Delta G_0}{k_B \vartheta} \left[ 1 - \left( \frac{\bar{\gamma}_{n+1}^{\text{eff}} - S_a}{S^*} \right)^p \right]^q \right) - \Delta \bar{\gamma}^p = 0, \quad (4.49)$$

where  $S^*$  is also a function of the plastic increment, viz.,

$$S^* = S_0^* + \frac{\Delta \bar{\gamma}^p}{\Delta t \dot{\gamma}_{0,s}}. \quad (4.50)$$

The solution of (4.49) may be obtained using any iterative technique. Solving this scalar equation for  $\Delta \bar{\gamma}^p$  essentially completes the time-integration procedure, because the value of  $\Delta \bar{\gamma}^p$  then determines  $\eta$ , which then allows one to calculate  $\mathbf{N}_{n+1}^p$ . Knowing  $\mathbf{N}_{n+1}^p$  and  $\Delta \bar{\gamma}^p$  determines  $\mathbf{E}_{n+1}^p$ ,  $\bar{\gamma}_{n+1}^p$  and  $\mathbf{A}_{n+1}$ , and since we are given  $\mathbf{E}_{n+1}$ , the elasticity relation gives  $\mathbf{T}_{n+1}$ .

Finally, the Bauschinger variable is updated at the end of the time increment :

$$B_{n+1} = B_0 + K(\bar{\gamma}_n^p + \Delta \bar{\gamma}^p)^n. \quad (4.51)$$

## 4.8 Numerical tangent

The above time-integration procedure is general. For a Abaqus/Standard UEL-oriented implementation, we require the additional specification of the incremental tangent for the Newton-Raphson algorithm. The procedure to calculate it is as follows.

At the end of each time increment, the constitutive function for the Cauchy stress  $\mathbf{T}_{n+1}$  is of the form

$$\mathbf{T}_{n+1} = \hat{\mathbf{T}}_{n+1}(\bar{\gamma}_n^p, \mathbf{E}_n^p, \mathbf{E}_{n+1}). \quad (4.52)$$

Since  $\mathbf{E}_{\text{trial}}^e = \mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n^p$ , we have equivalently,

$$\mathbf{T}_{n+1} = \hat{\mathbf{T}}_{n+1}(\bar{\gamma}_n^p, \mathbf{E}_{\text{trial}}^e). \quad (4.53)$$

During a time increment, the arguments  $(\bar{\gamma}_n^p, \mathbf{E}_n^p)$  are fixed and only  $\mathbf{E}_{n+1}$  changes during a Newton-Raphson iteration. The numerical tangent is given by

$$\mathbb{C}_{\text{alg}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \hat{\mathbf{T}}_{n+1}(\bar{\gamma}_n^p, \mathbf{E}_n^p, \mathbf{E}_{n+1})}{\partial \mathbf{E}_{n+1}}, \quad (4.54)$$

or, equivalently,

$$\mathbb{C}_{\text{alg}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \hat{\mathbf{T}}_{n+1}(\bar{\gamma}_{\text{n}}^p, \mathbf{E}_{\text{trial}}^e)}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e}. \quad (4.55)$$

The objective is to compute the above quantity, called the numerical tangent or the algorithmic tangent.

Recall (4.36),

$$\mathbf{T}_{n+1} = \mathbf{T}_{\text{trial}} - \sqrt{2}\mu \Delta \bar{\gamma}^p \mathbf{N}_{n+1}^p. \quad (4.56)$$

Also recall the result for the plastic flow direction  $\mathbf{N}_{n+1}^p$ ,

$$\mathbf{N}_{n+1}^p = \mathbf{N}_{\text{trial}}^p, \quad (4.57)$$

where  $\mathbf{N}_{\text{trial}}^p$  is given by

$$\mathbf{N}_{\text{trial}}^p = \sqrt{1/2} \frac{\mathbf{T}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta}}{\bar{\tau}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta}}, \quad (4.58)$$

with

$$\mathbf{T}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta} = (\mathbf{T}_{\text{trial}})_0 - \eta B_n \mathbf{A}_n. \quad (4.59)$$

Substituting (4.57) through (4.59) and (4.34) in (4.56) leads to

$$\mathbf{T}_{n+1} = \left( \mathbb{C} - \frac{2\mu^2 \Delta \bar{\gamma}^p}{\bar{\tau}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta}} \mathbb{I}_0 \right) \mathbf{E}_{\text{trial}}^e + \frac{\eta \mu \Delta \bar{\gamma}^p B_n \mathbf{A}_n}{\bar{\tau}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta}} \quad (4.60)$$

where we used the identity  $\mathbb{C}\mathbb{I}_0 = 2\mu\mathbb{I}_0$ , with  $\mathbb{I}_0$  the deviatoric part of the fourth order identity tensor. The first term in (4.60) is identical to the classical elasto-plastic tangent, while the second term represents the contribution of the backstress. Then, the expression for (4.61) is

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{T}_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e} &= \mathbb{C} - \frac{2\mu^2 \Delta \bar{\gamma}^p}{\bar{\tau}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta}} \mathbb{I}_0 - (\mathbf{E}_{\text{trial}}^e)_0 \otimes \frac{2\mu^2}{\bar{\tau}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta}} \frac{\partial \Delta \bar{\gamma}^p}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e} + \frac{2\mu^2 \Delta \bar{\gamma}^p}{\bar{\tau}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta}{}^2} (\mathbf{E}_{\text{trial}}^e)_0 \otimes \frac{\partial \bar{\tau}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta}}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e} \\ &\quad + \mu B_n \mathbf{A}_n \otimes \left( \frac{\Delta \bar{\gamma}^p}{\bar{\tau}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta}} \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e} + \frac{\eta}{\bar{\tau}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta}} \frac{\partial \Delta \bar{\gamma}^p}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e} - \frac{\Delta \bar{\gamma}^p \eta}{\bar{\tau}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta}{}^2} \frac{\partial \bar{\tau}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta}}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e} \right) \end{aligned} \quad (4.61)$$

Then, using

$$\bar{\tau}_{n+1}^{\text{eff}} = \sqrt{1/2} |\mathbf{T}_{n+1}^{\text{eff}}|, \quad (4.62)$$

together with (4.39)<sub>1</sub>, the last term of the first line in (4.61) can be computed

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\tau}_{n+1}^{\text{eff}}}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e} &= \frac{\partial \bar{\tau}_{n+1}^{\text{eff}}}{\partial \mathbf{E}_{n+1}^e} = \sqrt{1/2} \frac{\mathbf{T}_{n+1}^{\text{eff}}}{|\mathbf{T}_{n+1}^{\text{eff}}|} : \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}_{n+1}^e} \left( 2\mu(\mathbf{E}_{n+1}^e)_0 - B_{n+1} \mathbf{A}_{n+1} \right), \\ &\approx \frac{\mathbf{T}_{n+1}^{\text{eff}}}{\bar{\tau}_{n+1}^{\text{eff}}} : \mu \mathbb{I}_0, \end{aligned} \quad (4.63)$$

where we have neglected the “back stress” term for simplicity<sup>8</sup>. Then, using (4.63), we can compute

$$\frac{\partial \Delta \bar{\gamma}^p}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e} = \Delta t \dot{\gamma}_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e} \exp \left( \frac{-\Delta G_0}{k_B \vartheta} \left[ 1 - \left( \frac{\bar{\tau}_{n+1}^{\text{eff}} - S_a}{S^*} \right)^p \right]^q \right). \quad (4.64)$$

Let

$$\alpha = \Delta t \dot{\gamma}_0, \quad \beta = \frac{\Delta G_0}{k_B \vartheta}, \quad \text{and} \quad \hat{f}(\bar{\tau}_{n+1}^{\text{eff}}) = \frac{\bar{\tau}_{n+1}^{\text{eff}} - S_a}{S^*}, \quad (4.65)$$

with  $S^*$  taken from the previous increment for ease of calculation. Then, taking the derivatives, one can write (4.64) as

$$\frac{\partial \Delta \bar{\gamma}^p}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e} = -\alpha \beta q \left[ 1 - \hat{f}(\bar{\tau}_{n+1}^{\text{eff}})^p \right]^{q-1} \exp \left( -\beta \left[ 1 - \hat{f}(\bar{\tau}_{n+1}^{\text{eff}})^p \right]^q \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e} \left( 1 - \hat{f}(\bar{\tau}_{n+1}^{\text{eff}})^p \right), \quad (4.66)$$

and further let

$$\hat{g}(\bar{\tau}_{n+1}^{\text{eff}}) = \alpha \beta q \left( 1 - \hat{f}(\bar{\tau}_{n+1}^{\text{eff}})^p \right)^{q-1}, \quad \text{and} \quad \hat{w}(\bar{\tau}_{n+1}^{\text{eff}}) = \frac{p}{S^*} \hat{f}(\bar{\tau}_{n+1}^{\text{eff}})^{p-1}, \quad (4.67)$$

so that

$$\frac{\partial \Delta \bar{\gamma}^p}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e} = \hat{g}(\bar{\tau}_{n+1}^{\text{eff}}) \hat{w}(\bar{\tau}_{n+1}^{\text{eff}}) \exp \left( -\beta \left[ 1 - \hat{f}(\bar{\tau}_{n+1}^{\text{eff}})^p \right]^q \right) \frac{\partial \bar{\tau}_{n+1}^{\text{eff}}}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e}. \quad (4.68)$$

Next,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e} \left( \frac{1}{1 + \gamma \Delta \bar{\gamma}^p} \right), \\ &= -\eta^2 \gamma \frac{\partial \Delta \bar{\gamma}^p}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

---

8. This does not change the solution.

which may be computed using (4.68). Finally, using (4.59), the last term of (4.61) is

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\tau}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta}}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e} &= \sqrt{1/2} \frac{\mathbf{T}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta}}{|\mathbf{T}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta}|} : \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e} (2\mu(\mathbf{E}_{\text{trial}}^e)_0 - \eta B_n \mathbf{A}_n), \\ &= \sqrt{1/2} \frac{\mathbf{T}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta}}{|\mathbf{T}_{\text{trial}}^{\text{eff},\eta}|} : \left( 2\mu_{\mathbb{I}_0} - B_n \mathbf{A}_n \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e} \right), \end{aligned} \quad (4.70)$$

which can be evaluated using (4.69). Thus, using (4.63) through (4.70) into (4.61), the numerical tangent can be fully calculated, completing the time-integration procedure.

## CHAPITRE 5    ARTICLE 2 : SEQUENTIAL APPROXIMATE OPTIMIZATION OF INDUSTRIAL HAMMER PEENING USING FINITE ELEMENT SIMULATIONS

J. Luk-Cyr, R. El-Bawab, H. Champiaud, J. Lanteigne, A. Vadean

\* The final publication is published in *Structural and Multidisciplinary Optimization* and is available at Springer via <http://dx.doi.org/10.1007/s00158-016-1538-7>

### 5.1 Abstract

In this paper, the industrial hammer peening process is optimized using multi-objective, sequential approximate optimization, which is a mathematics- plus finite element- based algorithm. Since the number of design and objective variables is significant, the global optimization problem is split into two, more manageable multi-objective subproblems. The use of surrogate modelling together with an intensification and diversification strategy for solving the optimization subproblems allows for significant computational cost savings without loss of accuracy. Additionally, we propose a Bayesian inference criterion-based sensitivity approach for "filtering-out" design variables which do not significantly affect objectives variables. Finally, guidelines for selecting appropriate Pareto optima are given using  $N - 1$  Pareto diagrams, where  $N$  is the number of objective variables.

**Keywords :** Hammer peening ; Sequential approximate optimization ; Pareto optima ; Finite element

### 5.2 Introduction

Hammer peening is a mechanical process which involves plastically deforming the surface of large structures, therefore introducing beneficial compressive residual stress underneath the peened region and thus increasing fatigue strength by decreasing crack propagation rate (Curtat, 2016). This can be attributed to the compressive stress field surrounding the new born cracks. This peening depth, within which residual compressive stress have been introduced by hammer peening, is usually deep enough so as to replace any tensile residual stress that might have been previously introduced by other fabrication processes such as welding. The hammer peening can be carried out manually using a pneumatic or electrical hammer, or automated, such as with the SCOMPI robot currently used for the maintenance of Hydro-Québec's hydroturbines. It is used to delay the onset of longitudinal and lateral crack initiation of a weld toe repair (Hacini et al., 2009). In the latter, the hammer peening

tool is usually held normal to the surface of the weld toe, and is moved along the toe at a pre-determined head-speed and impact frequency. It is well known that this type of peening process produces higher improvements in fatigue strength than other peening process such as shot peening, (Kirkhope et al., 1999). This is partly due to the large amount of plastic work produced, which results in compressive residual stress deeper in the structure.

Although relatively simple in its application, the choice of hammer peening operating parameters (e.g. head speed, impact frequency, tool geometry), still mostly relies on empirical knowledge and experience. In order to better understand the effects of each parameters on the resulting compressive residual stress state without having to carry expensive experiments, many authors have used the finite element method (FEM) to describe hammer peening, (Branco et al., 2004; Frija et al., 2006; Liu et al., 2009; Baptista et al., 2011) and other similar processes such as shot peening, (Meguid et al., 1999; Guagliano, 2001; Gariépy et al., 2011) and ultrasonic peening, (Pile et al., 2012; Chaise et al., 2012). However, in these work emphasis is on the particular modelling of the process rather than the finding of optimal operating parameters. On the other hand, optimization of the operating parameters using statistical methods such as design of experiments and Taguchi methods have been used by Baragetti (1997) and George et al. (2004). However, these methods involve looking for an optimal solution among all possible combinations and is usually time-consuming and inefficient. The first use of mathematical optimization<sup>1</sup> for peening process design can be traced back to the paper of Evans (2002) for shot peening, where the framework for optimizing  $M$  peening parameters minimizing  $N$  objective functions is first introduced. Mathematical optimization, combined with finite element simulations, has since proven to be particularly efficient at finding optimal solutions of complex engineering systems and processes such as hydroforming, forging, welding, stamping and interference fit design where design parameters are numerous and where objectives are implicit functions of the design parameters<sup>2</sup> (cf. Bonte (2007); Bonte et al. (2008); Biron et al. (2013)). However, and to the knowledge of the authors, this coupled optimization procedure has not yet been used for the industrial hammer peening process, where operating parameters are still calibrated manually.

The objective of this paper is therefore to propose an efficient methodology for finding optimal operating parameters for the industrial hammer peening process using this hybrid mathematical optimization coupled to FEM approach. Furthermore, as it is well known in the field of design and process optimization (Bonte et al., 2010), a critical impediment to this approach is the extensive computation time required for a single function evaluation using FEM. Thus,

---

1. Method involving gradients, objective functions, interpolation, multi-objective, Pareto optima, etc.

2. There are no explicit relationships between the objective functions to minimize and the process parameters.



*sequential approximate optimization* involving surrogate modelling (Booker et al., 1999; Forrester et al., 2007, 2008) will be used together with FEM.

In what follows, the finite element implementation is presented in Sect. 5.3. Then, the optimization problem is discussed in Sect. 5.4 where design and objective variables are defined. In Sect. 7.5, the sequential approximate optimization algorithm is adapted to our industrial hammer peening optimization problem and mathematical background for surrogate modelling is given. We detail our optimization results and discuss the selection process of optimal solutions in Sect. 5.6, and conclude in Sect. 5.7.

### 5.3 Hammer peening implementation

#### 5.3.1 Finite element modelling

Following (Branco et al., 2004; Frija et al., 2006; Liu et al., 2009; Baptista et al., 2011), the industrial hammer peening process is implemented into the FEM software Abaqus/Standard (2013). For optimization purposes, we modelled a 16 mm wide representative plate with thickness  $H = 5$  mm, depth  $W = 10$  mm, and with a centered weld toe with dimensions  $2t = 4$  mm and  $h = 0.5$  mm. The mesh is shown in Fig. 5.1 where symmetry along the weld toe has been used. The mesh contains three-dimensional, fully-integrated eight-node elements (C3D8) near the weld toe (refined region), while three-dimensional, reduced-integration eight-node elements (C3D8R) are used away from the weld toe. The number of elements in both the refined and unrefined regions were set following a convergence analysis of the objective variables. The plate is made of 304L stainless steel whose stress-strain curve is given in Fig. 5.2, and is modelled as an initially stress-free, homogeneous isotropic material and classic J2-plasticity.

The mesh is constrained as follows :

- Symmetry is imposed on the weld toe's half-plane, with normal parallel to the lateral, 1-direction.
- The bottom nodes of the plate are constrained in the normal, 2- direction.
- The remaining three edges of the plate are clamped, representing fixtures used to hold the plate in place while it is hammer peened. The top nodes are constraint free.

Next, the impacting hammers are modelled using analytical rigid surfaces and are semi-spherical in shape, with tool-tip radius  $R$  and diameter  $D$ , as shown in Fig. 5.3. During the industrial hammer peening process, the hammer is held at an angle  $\theta$  with respect to the normal of the weld toe and is moved along the weld toe at a pre-determined head-speed

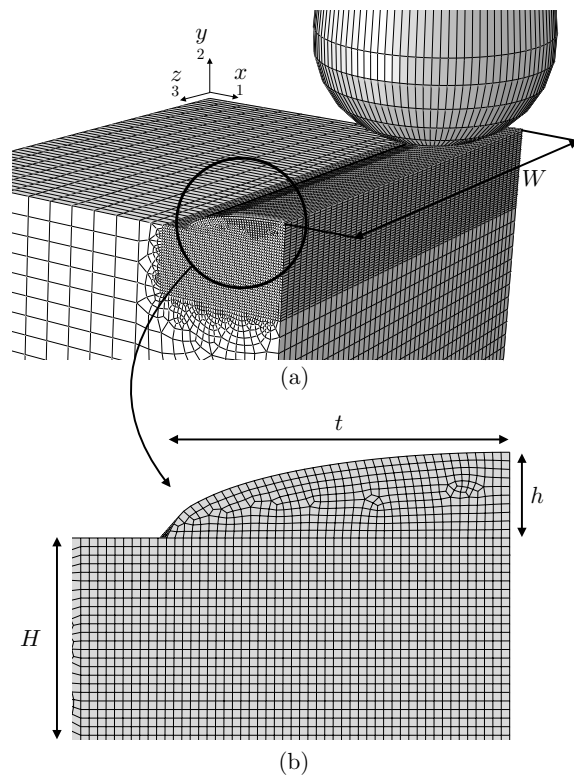


Figure 5.1 Symmetric finite element mesh and dimensions. (a) Overall view with the full hammer; (b) weld toe with dimensions. Orientation is shown on top-left

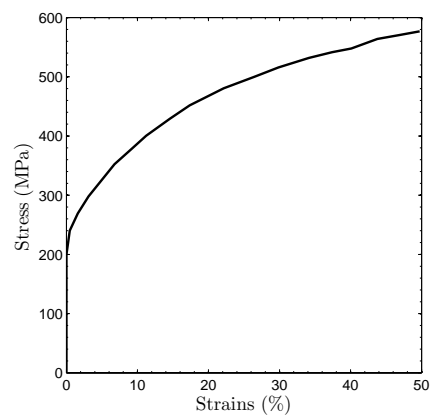


Figure 5.2 True stress vs true strain curve for stainless steel 304L

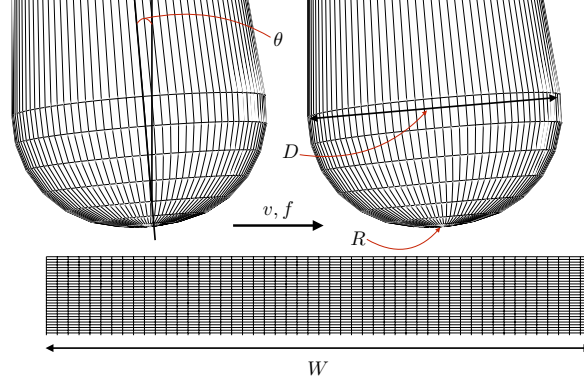


Figure 5.3 Schematic showing the hammer's geometry and movement (thick arrow) along the weld toe

$v$ , and hits the toe surface at a given impact frequency  $f$ . These process parameters are translated into our finite element implementation by modelling  $N_h$  hammers separated by a center-to-center distance  $\delta z = v/f$ , which are lowered sequentially through rigid displacement boundary conditions. The magnitude of this rigid displacement was determined by measuring the average experimental imprint depth left by the automated hammer peening robot SCOMPI (Hacini et al., 2009) on 304L steel, which is 0.15 mm. A similar approach was used by Frija et al. (2006); Sanjurjo et al. (2014); Mann et al. (2015) for shot peening.

Finally, the contact algorithm between the hammer and the top of the plate is a standard Augmented Lagrangian with friction coefficient  $\mu = 0.25$ , which is in the same range as that of Meguid et al. (2002)<sup>3</sup> and Gariépy et al. (2011).

### 5.3.2 Selection of objective functions

Peening processes introduce beneficial residual stress which are believed to delay the onset of longitudinal and lateral crack initiation of a weld toe repair. In shot peening for instance, Murugaratnam et al. (2015) supported the idea that a residual stress-based criterion describes the improvement resulting from a peening pass. This is in accordance with previous studies (cf. Farrahi et al. (1995); Torres and Voorwald (2002)) linking the residual stress state with fatigue life.

In Fig. 5.4, a typical residual stress profile is shown for a single hammer peening impact. The  $\sigma_3$  stress component is compared to the depth (2-direction), with 0 being immediately under the hammer impact location. Along this centered, through-thickness path, the maximum compressive residual stress, herein referred to as  $\sigma_3^{\text{compr}}$ , and its location,  $y_3^{\text{compr}}$ , are indicated

3. Meguid et al. (2002) observed that the differences in induced stress were negligible for  $0.1 \leq \mu \leq 0.5$ .

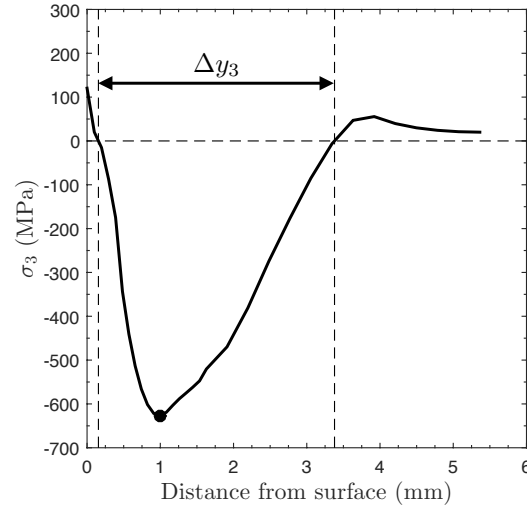


Figure 5.4 Typical longitudinal residual stress curve vs depth directly under the impact of the hammer. The peened face is at 0. Dashed lines indicate transition from tension to compression, and vice-versa

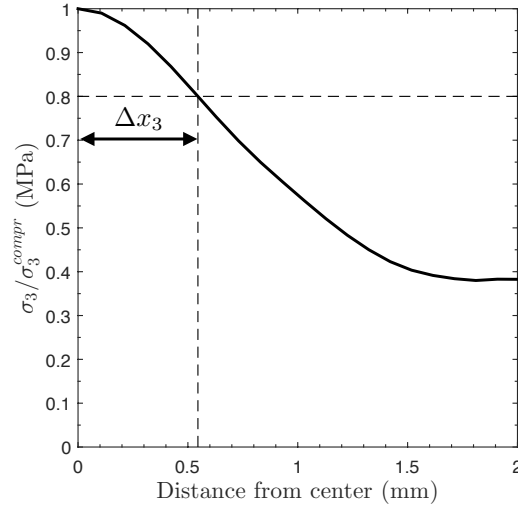


Figure 5.5 Typical normalized longitudinal residual stress curve vs lateral 1 direction from the impact location. The curve is taken at a depth  $y_3^{\text{compr}}$  from the surface. Dashed lines indicate distance after which  $\sigma_3^{\text{compr}}$  has decayed to 80% of  $\sigma_3^{\text{compr}}$

by a  $\bullet$  (see Fig. 5.4). The dashed lines gives the range  $\Delta y_3$  of the compressive region. From a technological perspective, hammer peening is carried out in order to introduce a region of residual compressive stress underneath the surface that is deep enough so as to replace any previously existing tensile residual stress. Therefore, this procedure can be used to find the operating parameters needed to reach a specific depth.

Similarly, Fig. 5.5 shows a normalized longitudinal residual stress profile compared to the lateral distance (1–direction) from the center of the hammer impact location, and taken at a depth  $y_3^{\text{compr}}$ . This figure indicates the lateral extent of the maximum compressive zone. The dashed lines gives the distance  $\Delta x_3$  within which maximum compressive residual stress remains above 80% of the observed maximum value. For similar reasons as  $\Delta y$ , the lateral extent  $\Delta x$  is a monitor of how “wide” the introduced residual compressive stress zone is. Since compressive residual stress decreases crack propagation rate, optimizing this width is also of interest. It is also important in cases where the repair zone is wide and requires multiple weld toes deposited side-by-side. Then, additional peening passes, laterally interspaced, are necessary to cover the whole region. Since over-peening can lead to a deterioration of the free-surface and eventual crack initiation (Kirkhope et al., 1999), Fig. 5.5 should serve as a guideline for determining a lateral spacing which trade-offs residual compressive stress and surface quality.

Since crack locus’ usually happen in the 1– and 3– direction (see Fig. 5.1), we propose the following quantities for describing the improvement due to hammer peening :

- $\sigma_i^{\text{compr}}$ ,  $i = \{1, 3\}$  – The maximum compressive residual stress in the  $i^{\text{th}}$  component directly under the hammer impact location, located at depth  $y_i^{\text{compr}}$ . It is indicated by a  $\bullet$  in Fig. 7.4;
- $\Delta y_i$ ,  $i = \{1, 3\}$  – The range of the compressive zone. It is indicated by the dashed lines in Fig. 7.4; and
- $\Delta x_i$ ,  $i = \{1, 3\}$  – The lateral distance, measured at depth  $y_i^{\text{compr}}$ , from the center of the hammer impact location within which the compressive stress remains above 80% of  $\sigma_i^{\text{compr}}$ .

Those quantities will therein serve as the objective variables in our optimization problem.

**Remark :** From an optimization perspective, minimizing the initial tensile residual stress region near the surface, herein referred to as  $y_i^{\text{start}}$ ,  $i = \{1, 3\}$  and indicated by the left-most dashed line in Fig. 5.4 may prevent from obtaining otherwise interesting engineering solutions. Instead, this variable is chosen as a *relaxable* optimization constraint.

## 5.4 Problem definition

In multi-objective optimization, a unique solution doesn't exist and trade-off solutions, also known as Pareto optima, are found. When the number of objectives is less than or equal to three, the user may easily choose a trade-off solution satisfying his needs. However, when the number of objectives is greater, as it is the case in this paper, visualization of the Pareto optima becomes cumbersome. Therefore, we choose a multi-disciplinary-type optimization procedure (Breitkopf and Coelho, 2013) and split our hammer peening optimization into two subproblems : (i) optimization of the hammer's geometry ; and (ii) optimization of the hammer peening process with optimal hammer geometry.

### 5.4.1 Hammer geometry optimization

The design parameters and objective functions for optimizing the hammer geometry are summarized in Table 5.1. The optimization problem may then be expressed as <sup>4</sup>

$$\begin{cases} \text{minimize}_{R,D,\theta \in \chi_1} & \sigma_i^{\text{compr}}, -\Delta y_i, -\Delta x_i, \quad i = \{1, 3\}, \\ \text{subject to} & y_i^{\text{start}} \leq 0.5 \text{ mm}, \quad i = \{1, 3\}, \end{cases} \quad (5.1)$$

where  $\chi_1$  represents the feasible design parameter space, as specified by the bounds for each design variable  $D$ ,  $R$  and  $\theta$ . In this optimization subproblem, the three design parameters are found by minimizing six objective variables for a single impact simulation.

---

4. Maximizing a function  $f(x)$  can be transformed into minimizing  $-f(x)$ .

Tableau 5.1 Design and objective variables for hammer geometry optimization

Variable	Units	Type	Value
$D$	mm	Design	[6, 12]
$R$	mm	Design	[15, 30]
$\theta$	deg.	Design	[0, 5]
$\sigma_1^{\text{compr}}$	MPa	Objective	Minimize
$\Delta y_1$	mm	Objective	Maximize
$\Delta x_1$	mm	Objective	Maximize
$\sigma_3^{\text{compr}}$	MPa	Objective	Minimize
$\Delta y_3$	mm	Objective	Maximize
$\Delta x_3$	mm	Objective	Maximize

### 5.4.2 Peening process optimization

Once a set of Pareto optimal design variables  $D^*, R^*, \theta^*$  is selected for the single impact simulation, we aim at optimizing a sequence of  $N_h$  hammer impacts through design variables  $v$  and  $f$ . Therefore, the objective quantities defined in Table 5.1 now exist at  $N_h$  locations. For this reason, the objective quantities for this subproblem are instead taken as the average over all  $N_h$  hammers, denoted with  $\bar{\cdot}$ . Those are summarized in Table 5.2.

Similarly, the optimization problem may be formulated as follows :

$$\begin{cases} \text{minimize}_{v, f \in \chi_2} & \bar{\sigma}_i^{\text{compr}}, -\Delta \bar{y}_i, -\Delta \bar{x}_i, \quad i = \{1, 3\}, \\ \text{subject to} & \bar{y}_i^{\text{start}} \leq 0.5, \quad i = \{1, 3\}, \\ \text{and} & R^*, D^*, \theta^*, \end{cases} \quad (5.2)$$

where  $\chi_2$  represents the feasible design parameter space.

### 5.5 Sequential approximate optimization algorithm

In the optimization community, our finite element simulation may be viewed as a time-consuming black-box where only design and objective variables are available. Hereinafter, the term black-box refers to our finite element simulation. For such problems, it is desirable to approximate the black-box using a so-called surrogate function (Jones et al., 1998; Booker et al., 1999) which shares similarities with the black-box, but is much cheaper to evaluate. A classic optimization algorithm may then be used to minimize this surrogate. Optima thus obtained are then used as input for the black-box and a comparison is made to compute the accuracy of said surrogate.

Tableau 5.2 Design and objective variables for hammer peening process optimization

Variable	Units	Type	Value
$v$	mm/s	Design	[4, 8]
$f$	Hz	Design	[20, 40]
$\bar{\sigma}_1^{\text{compr}}$	MPa	Objective	Minimize
$\Delta \bar{y}_1$	mm	Objective	Maximize
$\Delta \bar{x}_1$	mm	Objective	Maximize
$\bar{\sigma}_3^{\text{compr}}$	MPa	Objective	Minimize
$\Delta \bar{y}_3$	mm	Objective	Maximize
$\Delta \bar{x}_3$	mm	Objective	Maximize

The process is repeated sequentially until sufficient accuracy between the black-box and surrogate function is achieved. Such a methodology is often referred to as *sequential approximate optimization* (SAO). The main steps are summarized in Fig. 5.6 and briefly described below.

### 5.5.1 Initial FE simulations

The surrogate approximation function is initially constructed using finite element black-box evaluations  $\mathbf{x}_0$ . As suggested in Bonte et al. (2008), a typical number of initial black-box evaluations is  $K = 20 \times M$ , with  $M$  the number of design variables.

A common approach for choosing the  $K$  points is to sample the design variable space  $\mathbf{x}_i$  using Optimal Latin Hypercube Sampling : the design space of each design variable is divided into  $K$  equal intervals. Thereafter,  $K$  samples are chosen in such a way as to maximize the distance between any two points and minimize “holes” in the design space. A formal definition of this method is well described in Mackay et al. (2000).

### 5.5.2 Black-box approximation

In Lophaven et al. (2002a) and Couckuyt et al. (2012), *kriging* is shown to be particularly efficient at approximating engineering-type black-box functions and is well-suited for SAO. In this paper, we use the *ooDACE* Matlab toolbox implementation of Couckuyt et al. (2013, 2014).

In summary, kriging is an interpolation method whose weights are derived from covariance functions instead of simple polynomials. A kriging surrogate function  $\hat{y}$  predicts the black-box output at point  $x^*$  as follows :

$$\hat{y}(x^*) = f(x^*) + \mathbf{r}(x^*) \cdot \Phi^{-1}(\mathbf{y}_0 - f(\mathbf{x}_0)), \quad (5.3)$$

where  $f(x^*) = \sum_{i=1}^q \alpha_i b_i(x^*)$  is a regression function at prediction point  $x^*$ , with  $\alpha_i$  and  $b_i$ , the coefficients and basis functions, respectively.

The vector of correlations between prediction point  $x^*$  and initial  $K$  points  $\mathbf{x}_0$  is given by with  $\mathbf{r}(x^*) = \psi(x^*, \mathbf{x}_0)$ , with  $\psi(\cdot, \cdot)$  a correlation function. A correlation matrix,  $\Phi = \psi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)$  is also defined.

Finally,  $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\boldsymbol{\alpha}$  is the regression function evaluated at  $\mathbf{x}_0$ , with  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$  a regression matrix and  $\mathbf{y}_0$ , the exact finite element output at  $\mathbf{x}_0$ . Note that if  $x^* \in \mathbf{x}_0$ , then  $\hat{y}(x^*) = y(x_0)$



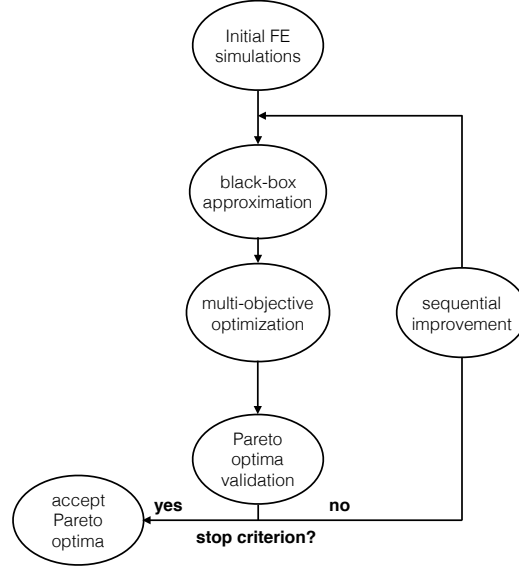


Figure 5.6 Schematics of the workflow in a sequential approximate optimization algorithm

(i.e. kriging interpolates exactly). Furthermore, since quadratic basis functions<sup>5</sup> are used in this work, this method is also referred to as *Universal Kriging*.

This formulation is also valid for higher dimensions of  $x$  (i.e.  $M > 1$  design variables), and also for  $N > 1$  objective variables. In the latter case, there would be  $\hat{y}_i(x^*)$ ,  $i = 1, \dots, N$  kriging functions — one for each objective.

In addition to the prediction (5.3), kriging allows the computation of a measure of inaccuracy of the surrogate at  $x^*$ , called the prediction variance  $s^2(x^*)$ ,

$$s^2(x^*) = \sigma^2 \left( 1 - \mathbf{r}(x^*) \cdot \mathbf{\Phi}^{-1} \mathbf{r}(x^*) + \frac{1 - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^\top \cdot \mathbf{\Phi}^{-1} \mathbf{r}(x^*)}{\mathbf{F}^\top : \mathbf{\Phi}^{-1} \mathbf{F}} \right) \quad (5.4)$$

with  $\sigma^2 = \frac{1}{K}(\mathbf{y}_0 - \mathbf{F}\boldsymbol{\alpha})^\top \cdot \mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{y}_0 - \mathbf{F}\boldsymbol{\alpha})$ , the kriging variance. Eq. (5.4) will prove useful in the Pareto optima validation step in Sect. 5.5.4.

Finally, the correlation function  $\psi(\cdot, \cdot)$  in (5.3) and (5.4) is expressed in the well-known

---

5. For second order polynomials,  $q = \frac{1}{2}(M+1)(M+2)$ .

Gaussian formulation,

$$\psi(x_0^i, x_0^j) = \exp \left( - \sum_{m=1}^M \vartheta_m |x_{0,m}^i - x_{0,m}^j|^2 \right), \quad (5.5)$$

no sum on  $i, j$ ,

where  $\vartheta_m$  are weighting parameters describing the influence of the  $m^{\text{th}}$  design parameter of point  $x_0^i$  on nearby  $m^{\text{th}}$  design parameter of point  $x_0^j$ . A high value of  $\vartheta_m$  means points have less influence on each other.

### 5.5.3 Multi-objective optimization

Since the number of objective function is greater than  $N > 2$ , efficient algorithms such as the BiMADS (Audet et al., 2008, 2010; Gheribi et al., 2016) cannot be used. On the other hand, the kriging approximation is relatively cheap to evaluate and a more computationally intensive method such as a genetic algorithm may be used. The multi-objective adaption of NSGA-II (Deb, 2001) which is available as a Matlab (2015a) toolbox is used in this paper for obtaining the Pareto optima. We used default solver's option, except for the population size, which was set to 1000.

We emphasize that in both subproblems (5.1) and (5.2), we have to minimize six objective variables. Therefore, a single Pareto optima contains six values for the objective variables, and three concomitant values for the design variables in subproblem (5.1) or two for subproblem (5.2).

In multi-objective optimization, the selection of specific Pareto optima requires a suitable method for analyzing their trade-offs. Thus, for each optimization subproblem, it is important to visualize the  $N - 1$  two-dimension Pareto diagrams in order to make guided decisions. In addition, these diagrams will prove useful in our intensification and diversification optimization strategy discussed next.

### 5.5.4 Pareto optima validation

Validation of the Pareto optima is accomplished using an *intensification* strategy, (Booker et al., 1999). For each  $n = 1, \dots, N$  objective variable, we select the Pareto optima that minimizes the  $n^{\text{th}}$  objective, which we denote  $\bar{x}_n^*$ . Then, those  $N$  points are re-evaluated using the finite element simulation, and a *relative model error* (Couckuyt et al., 2014) is

computed as

$$\begin{aligned}\epsilon_i &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left| \frac{\hat{y}_i(\bar{x}_n^*) - y_i(\bar{x}_n^*)}{\hat{y}_i(\bar{x}_n^*)} \right|, \quad i = 1, \dots, N, \\ \bar{\epsilon} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \epsilon_i\end{aligned}\tag{5.6}$$

where  $\hat{y}_i(\bar{x}_n^*)$  is the  $i^{\text{th}}$  objective value of the  $n^{\text{th}}$  Pareto optima  $\bar{x}_n^*$ , and  $y_i(\bar{x}_n^*)$  is the exact finite element output at  $\bar{x}_n^*$ . Thus,  $\epsilon_i$  represents the error over  $N$  Pareto optima of the  $i^{\text{th}}$  surrogate model (objective function), and  $\bar{\epsilon}$ , the average over all models.

When the error measure (5.6) is below a predefined threshold, the solution is deemed acceptable. It is passed into the finite element simulation one last time to verify its validity.

### 5.5.5 Sequential improvement

When the error threshold is not attained, a learning step, also known as sequential improvement (see Fig. 5.6), is accomplished as follows :

- (a) The  $N$  Pareto optima obtained in Section 5.5.4 are added to the initial design space  $\mathbf{x}_0$  in Section 5.5.1 ;
- (b) In addition, for each objective  $N$ , we select the Pareto optima exhibiting maximum prediction variance, as given by (5.4). These are also added to the initial design space  $\mathbf{x}_0$ . This method is known as diversification (Booker et al., 1999) ;
- (c) The current SAO iteration is completed and the algorithm is repeated.

By successively increasing the number of points in the design space of interest after each iteration, the surrogate model becomes increasingly accurate. We note that the purpose of intensification and diversification is to select candidates to add to the initial design space  $\mathbf{x}_0$  for the next iteration.

### 5.5.6 Summary

The main steps of our SAO algorithm, as described in Sect. 5.5, are summarized below :

- (i) Begin first iteration. Evaluate finite element black-box at  $K = 20 \times M$  points, denoted  $\mathbf{x}_0$ .  $M$  is the number of design variables ;
- (ii) Construct a kriging surrogate model  $\hat{y}_i$  for each objective,  $i = 1, \dots, N$ , using (5.3) and points  $\mathbf{x}_0$  ;
- (iii) Minimize the objective functions using the multi-objective genetic algorithm and obtain the  $N$ - dimension Pareto optima ;

- (iv) For each objective, select the single Pareto optima which minimizes it. Evaluate those  $N$  points using the finite element black-box ;
- (v) Compute the error measure using (5.6) ;
- (vi) If the error is acceptable, stop the algorithm ;
- (vii) Otherwise, add the  $N$  points computed in Step (v) to  $\mathbf{x}_0$
- (viii) For each objective, select the single Pareto optima with maximum prediction variance, as given by (5.4). Also add those  $N$  points to  $\mathbf{x}_0$  ;
- (ix) Begin a new iteration. Repeat Steps (iii) to (ix).

The SAO algorithm summarized above is to be applied first to the hammer geometry subproblem (5.1) in order to obtain optimal design parameters  $D^*$ ,  $R^*$  and  $\theta^*$ . Then, it is repeated for the hammer peening process optimization subproblem (5.2) with the previously found  $D^*$ ,  $R^*$  and  $\theta^*$ .

## 5.6 Results and discussion

### 5.6.1 Hammer geometry

The minimization subproblem (5.1), whose variables are listed in Table 5.1, converged after seven SAO iterations.

For visualization, Pareto optima objectives were all plotted against  $\sigma_1^{\text{compr}}$  as shown in Figs. 5.7. Pareto optima which minimizes at least one objective are emphasized with a colored marker and herein referred to as *selected Pareto optima*. For instance, the red marker indicates the selected Pareto optima that minimizes  $\Delta y_1$ , but not necessarily the other objectives.

Convergence plots of the relative model error  $\bar{\epsilon}$  in (5.6) against the number of iterations is shown in Fig. 5.7(f). After seven SAO iterations, the error  $\bar{\epsilon}$  is less than 5%, our stop criterion. Table 5.4 shows the number of SAO iterations, black-box and surrogate function evaluations done during our optimization. Recall that in each SAO iteration, the black-box (finite element simulations) is evaluated in “Initial FE” and “Sequential improvement” steps, while the surrogate evaluations are done during the “Multi-objective optimization” step through NSGA-II. Each black-box evaluation took roughly 20 minutes<sup>6</sup> compared to less than 0.1s for a surrogate evaluation.

Deciding which trade-off solution to choose with six objectives is difficult. For instance, if the region is to be subjected to a high longitudinal tensile load, one might be interested

---

6. Xeon CPU E5-2687 (8 cores) with 128GB RAM.

in minimizing  $\sigma_3^{\text{compr}}$ , and therefore choose the Pareto optima indicated by a green marker. Alternatively, a specific application may require the crack propagation rate to be as slow as possible over the transverse distance from the center of the weld toe. Since the rate is correlated with residual compressive stress, one would maximize the lateral extent  $\Delta x_i$ . The appropriate solutions would then be the blue and magenta markers. Therefore, user-input is essential at this stage.

As an example, the optimal hammer geometry listed in Table 5.3 is chosen as it exhibits a balance between all objectives, with an emphasis on the range of the compressive zones  $\Delta y_i$  and on the maximum compressive residual stress  $\sigma_i^{\text{compr}}$ .

Tableau 5.3 Selected Pareto optima (red marker) for the hammer optimization subproblem (5.1)

Variable	Units	Value
$D$	mm	10.1
$R$	mm	29.9
$\theta$	deg.	0.0
$\sigma_1^{\text{compr}}$	MPa	-528.5
$\Delta y_1$	mm	3.906
$\Delta x_1$	mm	0.891
$\sigma_3^{\text{compr}}$	MPa	-613.3
$\Delta y_3$	mm	4.063
$\Delta x_3$	mm	0.525

Tableau 5.4 Number of evaluations until convergence for subproblems (5.1)-(5.2)

Subproblem	SAO loops	Black-box	Surrogate
(5.1)	7	138	$8.24 \times 10^5$
(5.2)	2	58	$2.06 \times 10^5$

### 5.6.2 Peening process

The minimization subproblem (5.2), whose variables are listed in Table 5.2, is solved after only two SAO iterations. The Pareto optima are shown in Figs. 5.8(a)-(e) with markers once again indicating selected Pareto optima. In Fig. 5.8(f), the ratio  $\delta z_{\text{norm}} = \delta z / \delta z_{\text{max}}$ , with  $\delta z = v/f$ , is computed for each selected Pareto optima. This ratio represents a measure of the spacing between impacts, which in turn relates to the head-speed  $v$  and impact frequency

$f$ . From an operational point of view, a higher ratio  $\delta z_{\text{norm}}$  indicates that less time is required for completing the hammer peening process. We observe that  $\bar{\sigma}_1^{\text{comp}}$ ,  $\bar{\sigma}_3^{\text{comp}}$  and  $\Delta \bar{y}_3$  are diametrically opposed to  $\Delta \bar{y}_1$ ,  $\Delta \bar{x}_1$  and  $\Delta \bar{x}_3$  — in the former set, an increase in the ratio  $\delta z_{\text{norm}}$  is preferred while a decrease is preferred for the latter set. For instance, the selected Pareto optima minimizing  $\bar{\sigma}_1^{\text{comp}}$  (triangle black marker), is a good candidate since it offers a balanced trade-off of all objectives while also being *efficient*.<sup>7</sup> The parameters are listed in Table 5.5 with their corresponding objective values. For comparison purposes, we also included the finite element results using operating parameters typically used in our repair processes. Those operating parameters were calibrated *empirically* and without the use of an optimization tool. It can be observed that significant improvement may be achieved for all objective variables, except for  $\Delta \bar{x}_3$  which remains unchanged, with the optimized design parameters.

The computational cost for subproblem (5.2) are shown in Table 5.4. Each finite element black-box evaluation lasted about one to two hours, while the surrogate function evaluation was almost instantaneous.

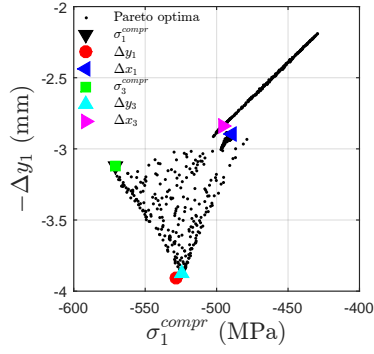
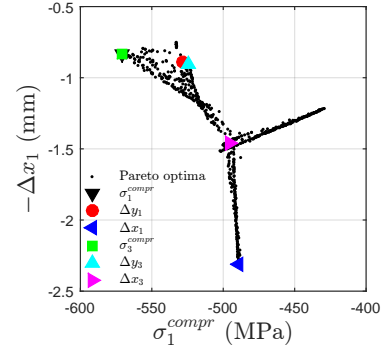
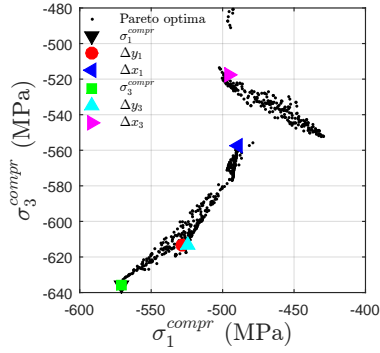
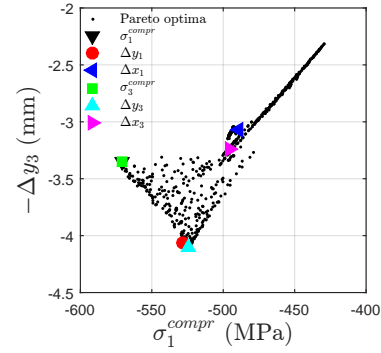
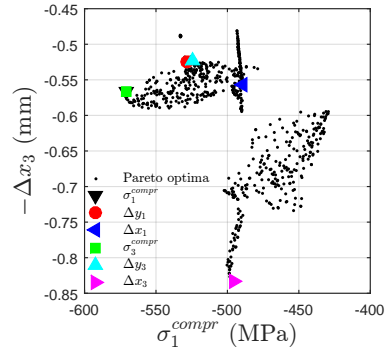
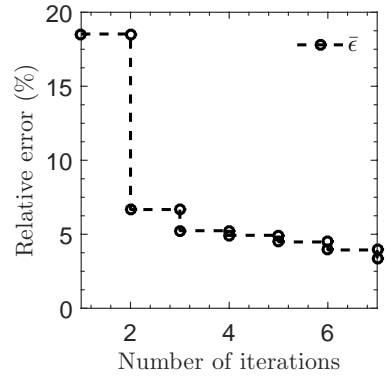
Tableau 5.5 Selected Pareto optima (triangle black marker) for the hammer peening process optimization subproblem (5.2). Also shown are finite element results for typically used operating parameters

Variable	Units	Optimization	Typical values
$D$	mm	10.1	12.0
$R$	mm	29.9	15.0
$\theta$	deg.	0.0	1.5
$v$	mm/s	7.9	6.0
$f$	Hz	21.2	36.0
$\bar{\sigma}_1^{\text{compr}}$	MPa	-441.1	-399.6
$\Delta \bar{y}_1$	mm	3.756	1.515
$\Delta \bar{x}_1$	mm	1.033	0.690
$\bar{\sigma}_3^{\text{compr}}$	MPa	-535.1	-453.9
$\Delta \bar{y}_3$	mm	4.312	2.972
$\Delta \bar{x}_3$	mm	0.832	0.892

### 5.6.3 Sensitivity analysis

For each optimization subproblem, we assessed the influence of each design parameters on the objective variables, individually, using the *Bayesian Information Criterion* (Posada and

7. By efficient, we mean that it should require less operational time to complete, in view of  $\delta z_{\text{norm}}$ .

(a) Red marker minimizes  $\Delta y_1$ .(b) Blue marker minimizes  $\Delta x_1$ .(c) Green marker minimizes  $\sigma_3^{compr}$ .(d) Cyan marker minimizes  $\Delta y_3$ .(e) Magenta marker minimizes  $\Delta x_3$ .

(f) Plot of the model and test point errors versus the number of SAO iterations.

Figure 5.7 Plots of (a)-(e) selected Pareto optima in the six dimension objective space for subproblem (5.1); and (f) error convergence plot.

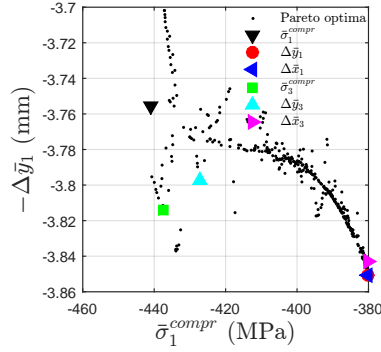
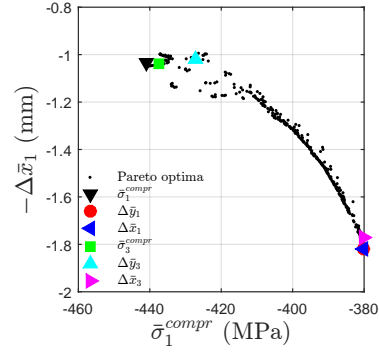
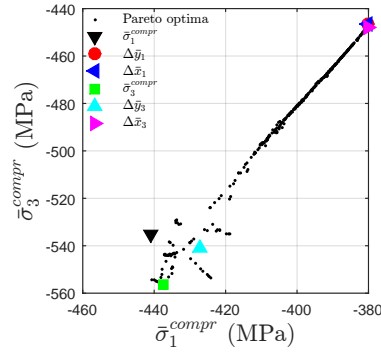
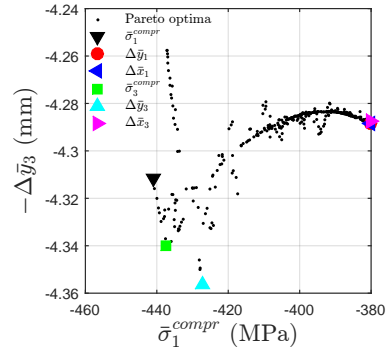
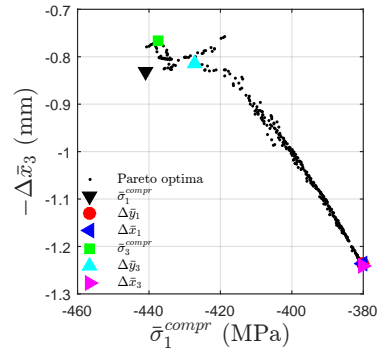
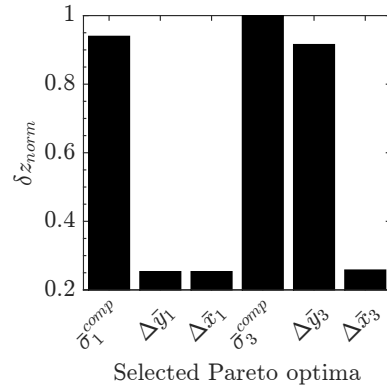
(a) Red marker minimizes  $\Delta\bar{y}_1$ .(b) Blue marker minimizes  $\Delta\bar{x}_1$ .(c) Green marker minimizes  $\sigma_3^{compr}$ .(d) Cyan marker minimizes  $\Delta\bar{y}_3$ .(e) Magenta marker minimizes  $\Delta\bar{x}_3$ .(f) Influence of normalized hammer spacing  $\delta z_{norm}$  on objective variables.

Figure 5.8 Plots of (a)-(e) selected Pareto optima in the six dimension objective space for subproblem (5.2); and (f) corresponding influence of normalized hammer spacing  $\delta z_{norm}$  on objectives. High score indicates high influence.



Buckley, 2004; Anderson, 2008), which is given by

$$BIC_{i,j} = -2\log(\mathcal{L}_{i,j}) + \log(K), \quad (5.7)$$

where  $\mathcal{L}_{i,j}$  is the loglikelihood value obtained from simple regression of objective variable  $y_i$  with design parameter  $x_j$  using  $K = 20 \times M$  black-box observations. This criterion represents goodness of fit and parsimony<sup>8</sup>, so that the lowest  $BIC_{i,:}$  score indicates the design parameter which influences objective variable  $y_i$  the most. We further introduce

$$\overline{BIC}_{i,:} = 1 - \frac{BIC_{i,:}}{\max(BIC_{i,:})}, \quad (5.8)$$

so that  $\overline{BIC}_{i,:} = 1$  represents the most influential parameter on objective  $y_i$ , as shown in Fig. 5.9 and Fig. 5.10 for subproblem (5.1) and (5.2), respectively. We observe the following :

- $D$  influences  $\Delta x_3$  the most, but as little influence on  $\Delta y_i$  ;
- $R$  influences most objectives, except  $\Delta y_i$  and  $\Delta x_1$  ;
- $\theta$  influences  $\sigma_i^{\text{compr}}$  and  $\Delta y_i$  the most ;
- $f$  influences all parameters, especially  $\Delta \bar{y}_3$  ; and
- $v$  influences  $\bar{\sigma}_i^{\text{comp}}$ ,  $\Delta \bar{x}_i$  and  $\Delta \bar{y}_1$  the most.

These observations have been cross-verified for each subproblem by fixing  $M - 1$  design parameters, varying the remaining one, and monitoring its effect on the  $N$  objective variables.

The key design variables involved in the robotic hammer peening process were already known from a previous empirical laboratory report, and therefore the BIC results were only shown for completeness. However, we emphasize that one does not always know which design variables should be included in the optimization problem. In these cases, a sensitivity analysis using BIC, such as the one presented in this paper, should be done immediately after step (i) in the SAO algorithm summarized in Sect. 5.5.6 in order to “filter out” design variables with little influence on the objective functions.

#### 5.6.4 Limitations

Hammer peening is a process by which load pulses are transmitted to the material and where displacement is actually the response of the material. As the material strain hardens progressively as a result of cumulated impacts, the stress-strain response is expected to vary. However, our experimental measurements have shown that in the case under study, the

---

8. A measure representing the amount of “over-fitting”.

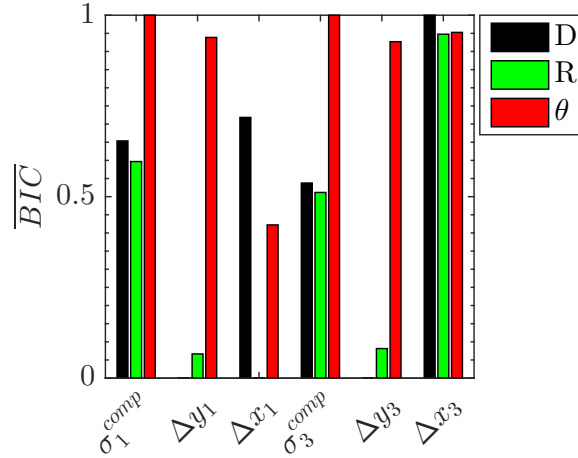


Figure 5.9 Normalized BIC score for hammer geometry optimization subproblem (5.1). Highest score indicates most influential design variable on corresponding objective

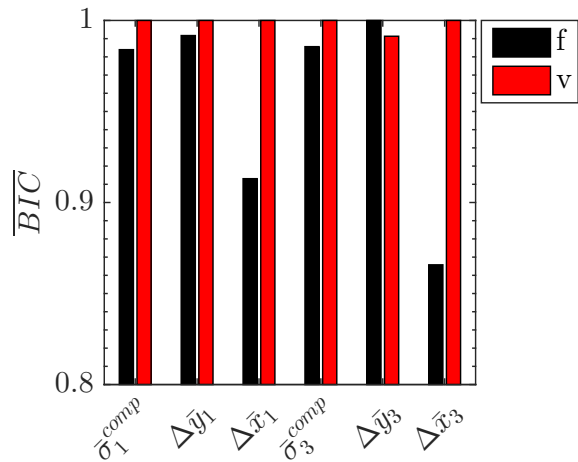


Figure 5.10 Normalized BIC score for hammer peening process optimization subproblem (5.2). Highest score indicates most influential design variable on corresponding objective

imprint depth left by hammer peening is approximately constant. Therefore, by imposing displacement boundary conditions, it is assumed that the residual stress response is governed by the chosen material's constitutive model. Note that because of the dynamic nature of the hammer peening process, this equivalent static approach is but an approximation (Choi and Park, 2002).

Furthermore, as shown in Fig. 5.8(f), the  $\delta z$  parameter, which relates to frequency and head-speed, describes how “fast” the material is deformed. Thus, materials which exhibit significant strain-rate sensitivity might yield different behaviours of the objective variables, as function

of  $\delta z$ , which the classic J2 plasticity model used in this paper cannot capture.

## 5.7 Conclusion

In this paper, we have described a methodology for finding optimal operating parameters of the industrial hammer peening process. To minimize computation cost associated with time-consuming finite element simulations, we have successfully applied a sequential approximate optimization algorithm where kriging is used as a surrogate, black-box approximation of this multi-dimensional problem. Multi-objective optimization was used to obtain the  $N$ -dimension Pareto optima, from which a solution is selected by splitting the global optimization problem into two local subproblems. The hammer geometry is optimized first, then its results are used to optimize the hammer peening process. Additionally, a design parameter sensitivity analysis was carried using statistical Bayesian Inference Criterion. This method allows for the determination of the problem's most influential design variables.

The optimized results obtained for the hammer geometry and peening process rely on the assumption that the objective variables best representing hammer peening *improvement* are those given in Table 5.1 and 5.2. Although those quantities have been studied to relate to fatigue life enhancement (Branco et al., 2004; Baptista et al., 2011; Murugaratnam et al., 2015), no conclusions can be drawn on the relative importance of each objective variable on fatigue life. Hence, additional research is to be carried to shed light on the exact nature of those objective variables.

This being said, the SAO methodology proposed in this paper is general in a sense where it has proven to be an efficient tool for optimizing multi-objective engineering black-box problems such as those requiring finite element simulations. Computation time is greatly reduced compared to directly applying optimization on the problem, and a wide array of Pareto optima are made available.

## 5.8 Acknowledgements

The authors would like to thank the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC) for their financial support. The support of the Consortium de Recherche en Fabrication et Réparation des Roues d'Eau (CReFaRRE), Hydro-Québec, and Alstom is also gratefully acknowledged.

## CHAPITRE 6 ARTICLE 3 : MECHANICAL PROPERTIES OF 75% Ar / 25% CO<sub>2</sub> FLUX-CORED ARC WELDED E309L AUSTENITIC STAINLESS STEEL

J. Luk-Cyr, R. El-Bawab, H. Champiaud, J. Lanteigne, A. Vadean

\* The final publication is published in *Materials Science and Engineering A* and is available at Elsevier via <http://dx.doi.org/10.1016/j.msea.2016.09.099>

### 6.1 Abstract

The austenitic stainless steel E309L filler is a commonly used material for in-situ crack repairs of hydro-turbines due to its high weldability, mechanical and chemical compatibility with the turbine's base material. However, experimental data for the as-welded E309L filler is scarce. In this paper, the mechanical properties of as-deposited 75% Ar / 25% CO<sub>2</sub> flux-cored arc welding E309L austenitic stainless steel are investigated. The material is shown to be rate- and temperature-sensitive. Furthermore, although the directional nature of the welding/repair process might suggest otherwise, the response is found to be isotropic. Finally, a classic three-dimension Johnson-Cook plasticity theory is implemented and reproduces the experimental results with good accuracy.

### 6.2 Introduction

In recent years, Hydro-Québec, a mainly hydro-based generating utility with over 36 GW capacity from Québec in Canada, has been focusing on improving the long-term durability of their in-situ crack repairs of their power-generating hydro-turbines, which are commonly manufactured using martensitic stainless steels CA6NM and S41500. When subjected to high temperature gradients, such as in welding processes, they require post-weld heat treatments in order to temper the as-welded martensite. However, those heat treatments are hardly applicable after in-situ crack repairs by welding, where they are required. Instead, a soft austenitic stainless steel E309L is used as filler material for crack repairs by welding, since only a post mechanical relaxation process is required (Godin et al., 2013). Such repairs usually consists in removing the base material around the crack locus and subsequently depositing E309L filler by welding, which has different mechanical properties than the turbine's base material (Simoneau et al., 2009; Lim et al., 2015). This welding procedure generates high temperature gradients from which, together with the different material properties of the base

and filler materials, permanent strain incompatibilities arises as well as concomitant tensile residual stresses.

Thereafter, an in-situ stress relaxation process such as hammer peening (Hacini et al., 2008, 2009) is conducted to relieve tensile residual stress in the repaired region, thus mechanically soliciting the filler material.<sup>1</sup> In order to assess the quality of the repair following such welding and relaxation processes, and to further improve the long-term durability of the in-situ reparation, it is of utmost importance to characterize the mechanical behaviour and properties of the filler material. Although the filler austenitic stainless steel E309L is currently being used for the reparation of hydro-turbines, experimental results available in the literature are either incomplete, or specific to welding/deposition processes different than those actually used in our applications (Meyer and Toit, 2008; Devendranath et al., 2011; Z. L. Wang, 2014).

Therefore, the aim of this paper is to report on the mechanical properties of the austenitic filler E309L steel deposited using a 75% Ar / 25% CO<sub>2</sub> gas protected flux-cored arc welding process used during in-situ crack reparation. Furthermore, due to the directional nature of the repair/weld process, one could have expected anisotropy of the mechanical properties. However, our experiments have shown that the material's response is isotropic. Finally, to allow for possible modelling/simulation and optimization of the hammer peening process, a suitable constitutive theory is thereafter calibrated in order to reproduce the experimental results.

The plan of this paper is as follows. A description of the material involved, deposition procedure, microstructure and experimental set-up is described in Sect. 6.3. Our results are discussed in Sect. 6.4 which includes the obtained material response and mechanical properties. A suitable plasticity theory is also described and used to fit the experimental data. We conclude in Sect. 6.5 with some final remarks.

### 6.3 Experimental method

After depositing the filler material in the area of interest by welding, the weld bead is usually allowed to cool down to room temperature before the stress relaxation process begins. Then, a hammer peening relaxation process is carried out, either manually using a pneumatic or electrical hammer, or automated, such as with the SCOMPI robot currently used for the maintenance of Hydro-Québec's hydro-turbines (Simoneau et al., 2009). During the latter, the E309L filler is subjected to strain-rates ranging between  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$  and  $10^0 \text{ s}^{-1}$  (Hacini

---

1. Throughout this paper, weld and filler material are used interchangeably for the E309L.

et al., 2009). Furthermore, when multiple weld beads are required to fill a region, hammer peening is either accomplished after the region is completely filled, or in-between welding passes. In the latter case, the weld beads are kept at a maximum interpass temperature of 100°C to prevent material degradation. Therefore, to properly configure the hammer peening procedure, the strain-rate and temperature-sensitive behaviours of the as-deposited filler E309L must be known. This section discusses the experimental method for obtaining such.

### 6.3.1 Materials and welding method

Our preparation of the E309L weld is as follows. A standard S31603 designated rolled and annealed 316L austenitic stainless steel plate<sup>2</sup> with dimensions  $460 \times 180 \times 38$  mm was machined and used as the substrate. The surface was cleaned with alcohol and grinded so as to insure adhesion of the weld material. The latter — AWS A5.22 :E309T1-1/T1-4 flux-cored filler metal supplied by Shield-Bright — was then deposited systematically using the automated welding process SCOMPI (Simoneau et al., 2009) with a torch angle of 0° (perpendicular to the welding direction). The chemical compositions of the substrate and filler metal are shown in Table 6.1. A series of weld beads with approximate width of 5 mm are deposited side by side, longitudinally and on the metal substrate until the latter is entirely covered. This filler metal layer has an approximate uniform thickness of 3.5 mm and contains roughly 35 weld beads. The process is repeated, layer by layer, until a 35 mm thick block (roughly 10 layers) of E309L is obtained on top of the substrate. A schematic of the process is shown in Fig. 6.1. The flux-cored arc welding (FCAW) process is used with a 75% Ar / 25% CO<sub>2</sub> protection gas for the deposition of the weld beads.<sup>3</sup> The welding conditions given in Table 6.2 represent an average over all the deposited weld beads. Prior to welding, the substrate is preheated at a temperature of 50°C and is monitored so that it never exceeds 300°C to avoid excessive thermal strain.

Tableau 6.1 Chemical compositions of substrate and filler metal (wt.%). Maximum acceptable limits are shown except when range is specified

Type	wt. %								
	C	Cr	Ni	Mo	Mn	Si	S	P	Cu
substrate metal (316L)	0.03	16-18	10-14	2.0-3.0	2.0	0.75	0.03	0.045	—
filler metal (E309L)	0.04	22-25	12-14	0.75	0.5-2.5	0.9	0.03	0.04	0.75

2. ASTM A-240

3. A new contact tip is used after each layer.

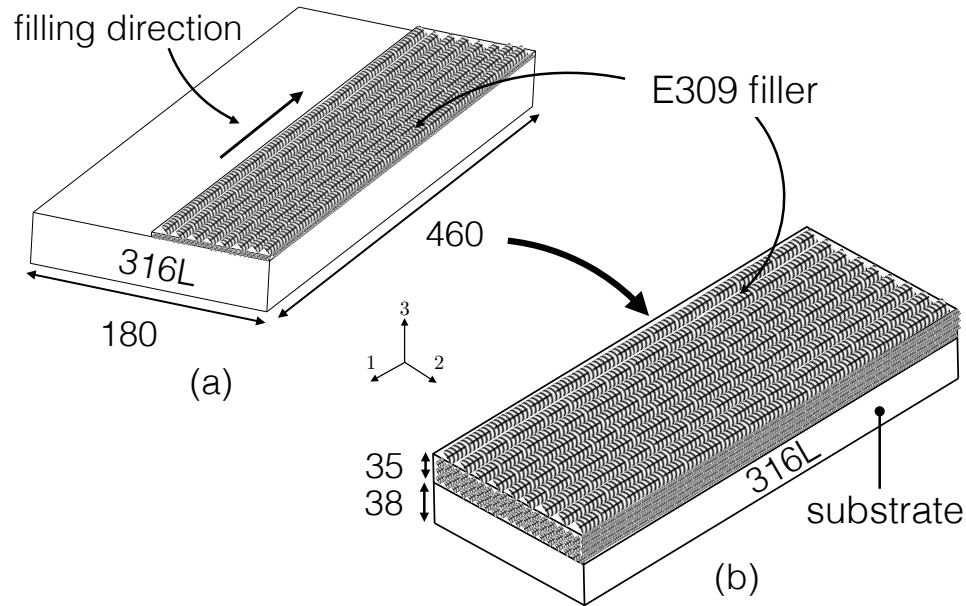


Figure 6.1 Schematic of the deposition process of austenitic stainless steel E309L on a 316L substrate. (a) A layer is composed of individually-deposited weld beads oriented longitudinally to the substrate; (b) the process is repeated, layer by layer, until a 35 mm thick block of E309L is obtained

Tableau 6.2 Welding parameters for flux-cored arc-welding

Filler metal diameter (mm)	Current (A)	Voltage (V)	Wire feed speed (mm/s)	Welding speed (mm/s)	Preheat T° (°C)	Max T° (°C)
1.15	205.5	26.9	200.0	6.0	50	300

### 6.3.2 Microstructure

E309L samples were cut from the deposited block and were prepared for etching through a process of low speed (150 RPM) planar grinding with 600 grit silicon carbide paper followed by polishings using 9  $\mu\text{m}$ , 3  $\mu\text{m}$  and 1  $\mu\text{m}$  diamonds on polishing cloths, respectively. The samples were then electro etched for 10s in an oxalic acid aqueous solution (10 g/100 ml). For this etch, a platinum cathode was installed around the sample submerged in the electrolytic solution to allow a 6V tension through the sample. This type of etch reveals both the austenite grain and the delta ferrite network, whose volume content may reach up to 10%. Those are shown in Figs. 6.2 for the transverse and longitudinal planes. The background phase in white is the austenite, whereas outlined in black is the ferrite network formed upon the dendrites of the weld metal. We also measured an average Vickers hardness of HV 200, which is in the same range as in Curtat (2016).

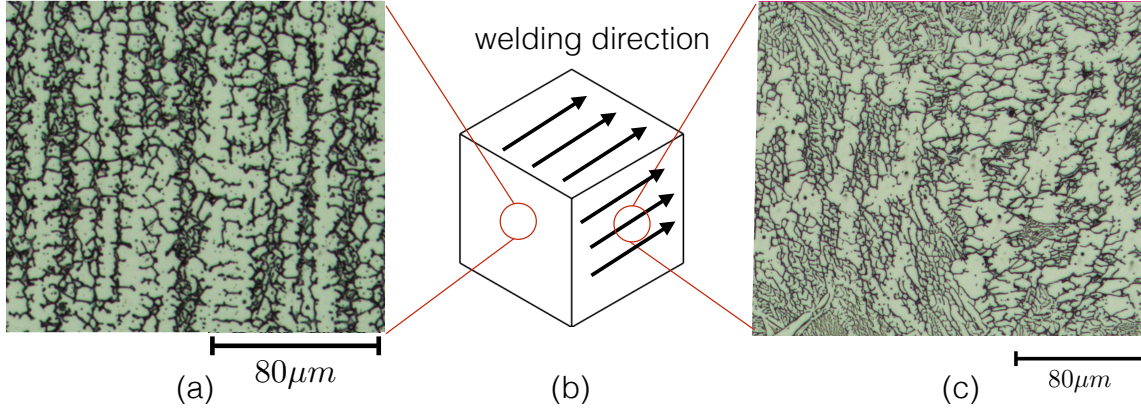


Figure 6.2 Optical micrograph (200x) after etching of as-welded E309L showing its micro-structure in the (a) transverse direction; and (c) longitudinal direction

### 6.3.3 Uniaxial tensile experiment

Standard uniaxial tensile tests were conducted on the E309L weld material following ASTM-E8 (2011) under different strain-rates, temperatures and orientations to investigate any material anisotropy. First, thick 35 mm specimen-shaped block were machined from the E309L deposited material. The specimen shape and orientation are shown in Fig. 6.3. Those are extracted along the welding direction ( $0^\circ$ ), at a  $45^\circ$  angle and perpendicular to the filling direction ( $90^\circ$ ). Then, 4 mm thick dog-bones were individually cut from those 35 mm specimen-shaped block using electrical discharge machining (EDM).

The samples were tested for strain-rates ranging between  $10^{-3} - 10^0 \text{ s}^{-1}$ , and temperatures between  $25 - 100^\circ\text{C}$  using an electromechanical column tabletop MTS Criterion C43.504 machine with a load-cell of 50 kN capacity and an accuracy of  $\pm 1\%$  of the applied force. The displacement was measured using a 25 mm extensometer<sup>4</sup> with a maximum strain range of 50%.

## 6.4 Results and discussion

### 6.4.1 Strain-rate sensitivity

The room temperature tensile true stress-strain response of E309L was identical for dog-bones samples extracted at  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  and  $90^\circ$ . The average response is shown in Fig. 6.4(a) for four nominal strain-rates  $\dot{\epsilon} = \{10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0\} \text{ s}^{-1}$ . A corresponding detailed view of the influence of nominal strain-rate on true stress at a given true strain is also shown in

---

4. MTS 634.12F-24



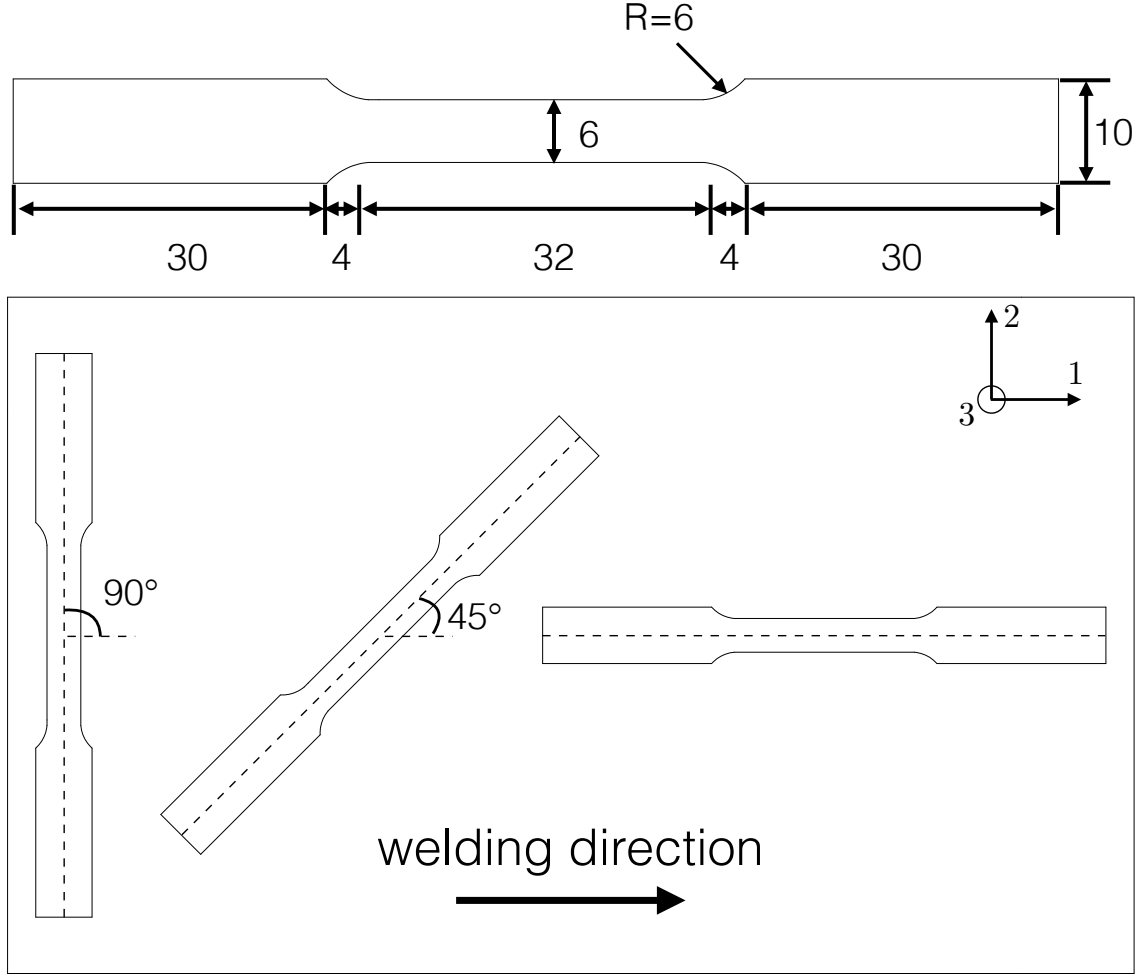


Figure 6.3 Dimensions in mm and orientation of E309L samples for uniaxial tensile experiments. The samples are 4 mm thick and follow ASTM-E6-09

Fig. 6.4(b). A typical dependence of the stress on strain-rate is

$$\ln(\sigma) \propto q \ln(\dot{\epsilon}), \quad (6.1)$$

where  $q$  is the rate-sensitivity parameter, given by the slope of the stress vs strain-rate curve on a log-log scale. We calculated an average value of  $q = 0.0105$  which is in the lower end of the expected range for stainless steels (Altan and Boulger, 1973)

Furthermore, the average 0.2% offset yield strength ( $\sigma_y$ ), tensile strength ( $\sigma_u$ ) and strain to failure ( $\epsilon_f$ ) are given in Figs. 6.5(a) and (b) as a function of strain-rate. The average was taken over three samples in each material orientation and the error bars correspond to one standard deviation. Yield strength increases moderately with strain-rate, which is consistent with a positive strain-rate sensitivity. However, as strain-rate increases, the tensile strength

does not vary much in the low rate regime under study. We believe that the increase in tensile strength due to strain-rate sensitivity is counterbalanced by an increase in dissipative deformation heating with increasing strain-rate. Similar trends have been observed by Davis (2004).

Variability in the strain to failure results is attributed to the directional nature of the welding process (i.e. it is along a preferred longitudinal direction). Failure in the perpendicular ( $90^\circ$ ) orientation often happened at the interface between weld beads which are approximately 5 mm wide — a sample therefore contains roughly six weld beads in its reduced section. The  $0^\circ$  and  $45^\circ$  orientations did not have this feature. In average however, change in the ductility with increasing strain-rate was found to be negligible.

#### 6.4.2 Temperature sensitivity

To shed light on the proper hammer peening procedure to be used when multiple weld beads are required, the behaviour and mechanical properties of E309L have also been investigated at temperatures up to  $100^\circ\text{C}$ . The strain-rate was fixed at  $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ .

The true stress-strain curves are shown in Fig. 6.6(a). A corresponding detailed view of the effect of temperature on true stress at fixed true strain is also shown in Fig. 6.6(b). A typical dependence of flow stress on temperature is the creep equation which, given a fixed strain-rate, scales as

$$\ln\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) \propto \frac{p}{\theta}, \quad (6.2)$$

where  $\sigma_0$  is a unit constant and  $p$  the temperature-sensitivity parameter given by the slope of the stress vs temperature on the proper scale. We calculated an average value of  $p = 2.68$ .

The 0.2% offset yield strength, tensile strength and strain to failure are shown in Figs. 6.7(a) and (b) as a function of the temperature. The yield and tensile strengths linearly decrease with increasing temperature, in accordance with the temperature sensitivity of the response. As for ductility, it is highest at room temperature, and slightly decays as the test temperature is increased to  $100^\circ\text{C}$ . Similar trends have been observed for 304, 316 and 316LN stainless steels in Byun et al. (2004). A summary of the mechanical properties are given in Table 6.3.

Figs. 6.8 show scanning electron microscopy<sup>5</sup> images of the fracture surface of our uniaxial tensile samples. The surfaces are characterized by areas of elongated dimples. Figs. 6.8(a), (c) and (e) show the change in ductile deformation behaviour with increasing temperature. The change in morphology is visible, with the size of the dimples slightly increasing with

---

5. The scanning electron microscopy (SEM) images were taken with a HITACHI S-3700N microscope operated at 15 kV.

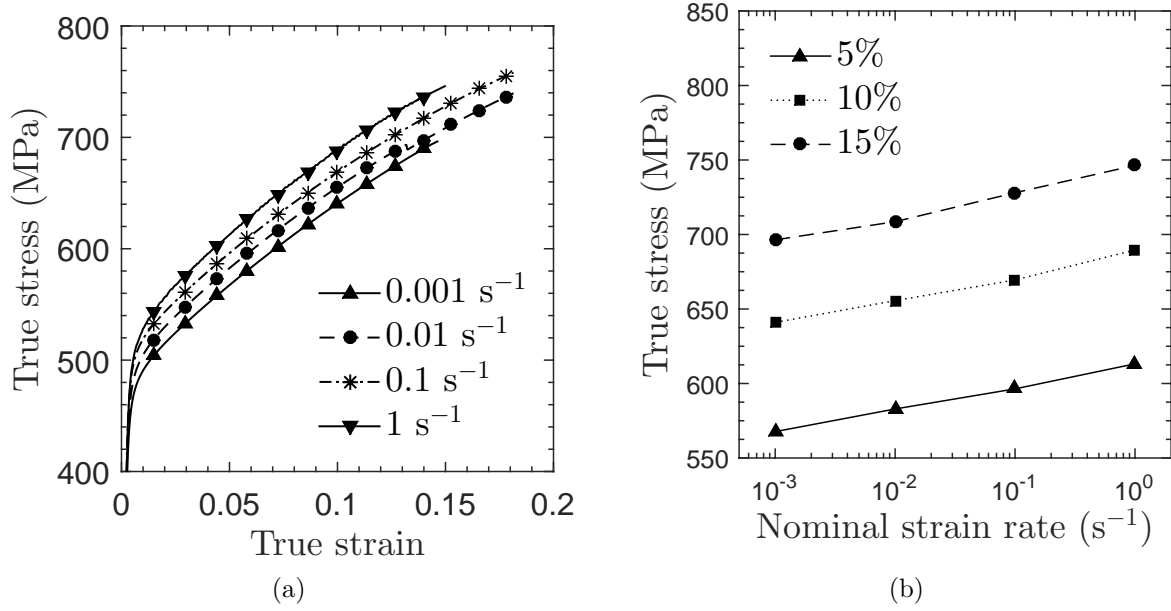


Figure 6.4 (a) Room temperature true stress-strain curves for four nominal strain-rate levels. The markers are uniformly distributed for visualization only. (b) Also shown is the influence of the four nominal strain-rate on true stress at different true strain levels

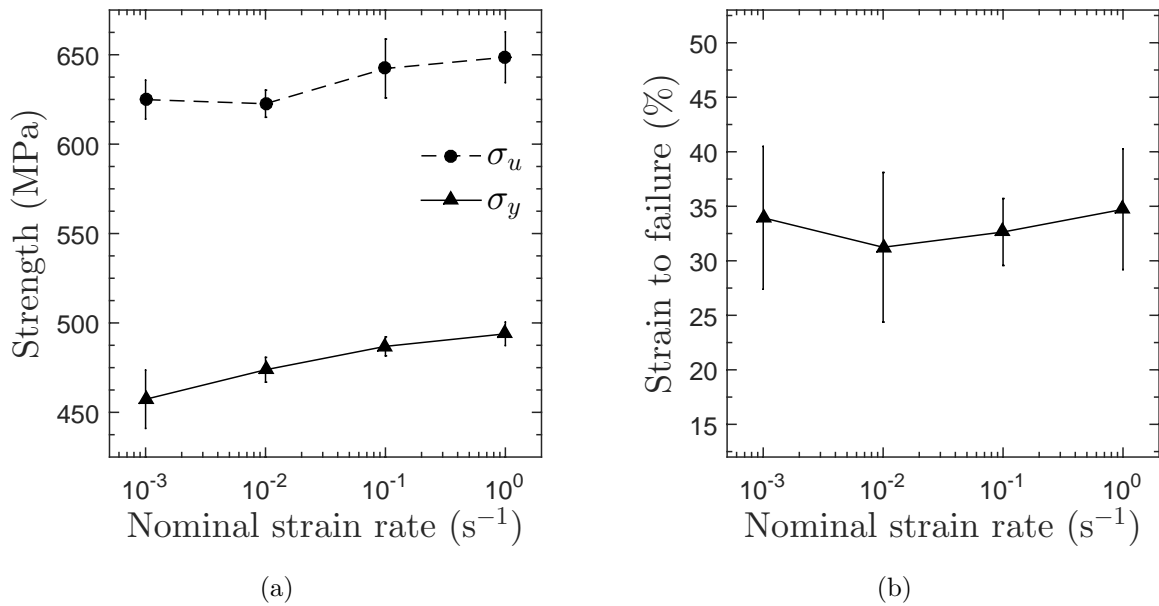


Figure 6.5 Effect of nominal strain-rate on (a) 0.2% offset yield ( $\sigma_y$ ) and tensile strengths ( $\sigma_u$ ); and (b) strain to failure, extracted from the engineering stress-strain data. Error bars correspond to one standard deviation over the average of three samples per material orientation

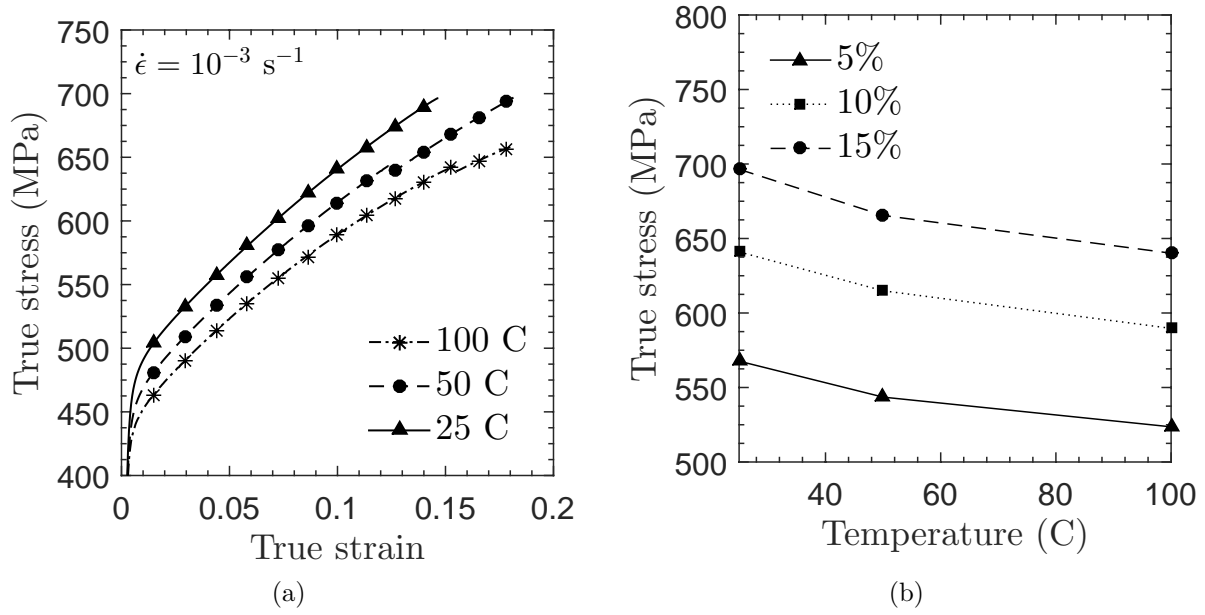


Figure 6.6 (a) True stress-strain curves at three temperatures. The markers are uniformly distributed for visualization only. (b) Also shown is the influence of temperature (three) on true stress at different true strain levels. Nominal strain-rate is  $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$

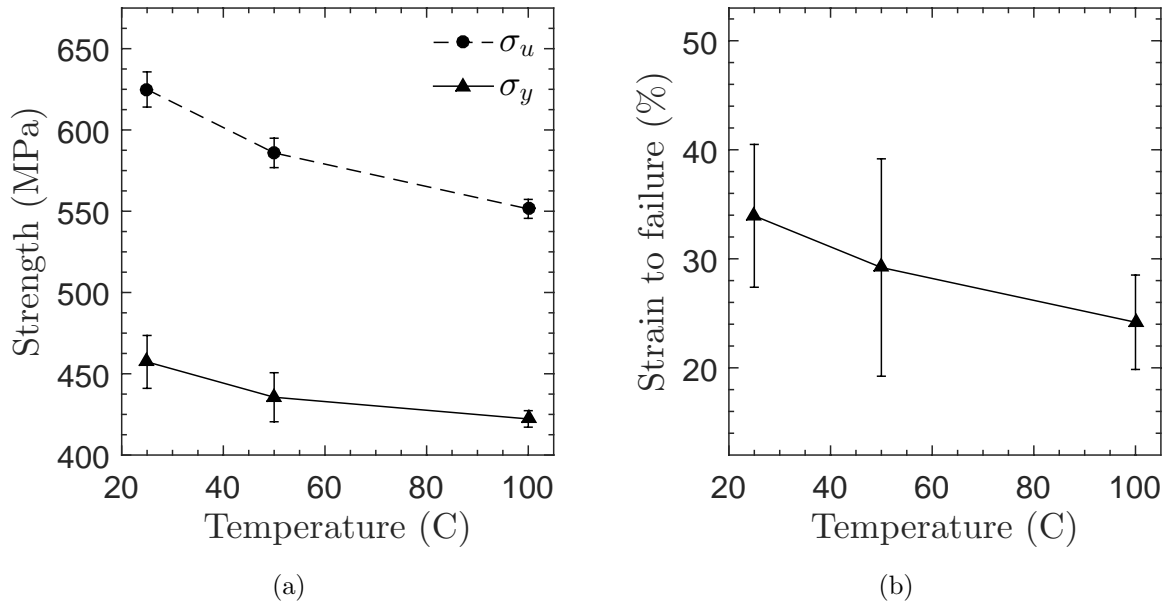


Figure 6.7 Effect of temperature on (a) 0.2% offset yield ( $\sigma_y$ ) and tensile strengths ( $\sigma_u$ ); and (b) strain to failure, extracted from the engineering stress-strain data. Error bars correspond to one standard deviation over the average of three samples per material orientation. Nominal strain-rate is  $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$

Tableau 6.3 Average\* yield and tensile strengths, and strain-to-failure as a function of temperature and nominal strain-rate

	25°C				50°C	100°C
$\log \dot{\epsilon}$ (s <sup>-1</sup> )	-3	-2	-1	0	-3	-3
$\sigma_y$ (MPa)	457.3	473.8	486.9	493.9	435.6	422.2
$\sigma_u$ (MPa)	624.9	622.6	642.3	648.6	585.9	551.5
$\epsilon_f$ (%)	33.94	31.24	32.64	34.72	29.24	24.18

temperature as a result of easier plastic slip. These observations are in accordance with Siska et al. (2016).

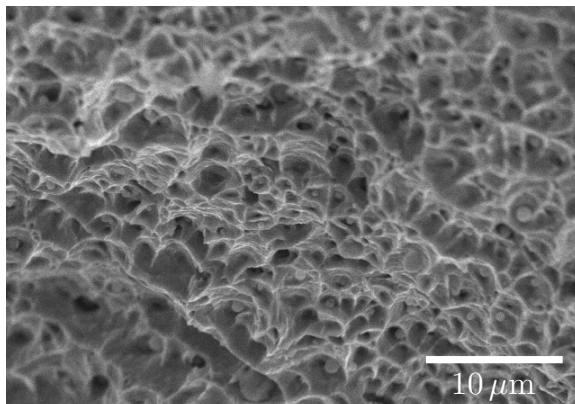
In Figs. 6.8(a), (b), (d) and (f), the change in the room temperature ductile deformation behaviour is shown for various strain-rates. Consistent with Lee et al. (2004), the strain-rate appears to influence both the shape and density of the dimples, which seems to reflect the different levels of ductility of the samples before fracture. An increase in strain-rate appears to reduce the average size of the dimples, but increase their density. This observation seems reasonable when considering the concomitant increase in yield and tensile strengths.

### 6.4.3 Isotropy

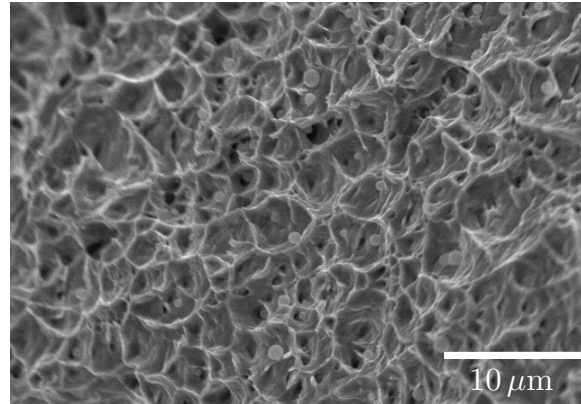
Although the welding process is directional in nature, the material response and properties were found to be equivalent for all three in-plane material orientations under study. In order to conclude on the isotropy (or anisotropy) of the material, let us consider a material that exhibits different yield behaviour in different directions. Such material can be modelled using Hill's quadratic yield criterion (Hill, 1948), which is given by

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + N\sigma_{12}^2, \quad (6.3)$$

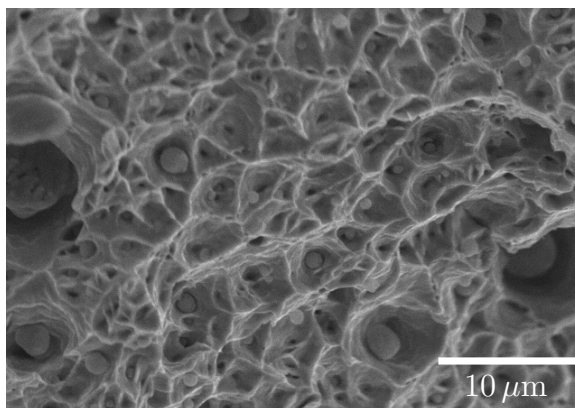
where  $F, G, H, L, M$  and  $N$  are constants involving ratios of yield stress obtained by tests in different material orientations. Since the plastic response of the material is identical in the 0°, 45° and 90° (in-plane) direction, and given the material symmetry of the weld block (see Fig. 6.1), it is easily shown that  $F = G = H = 1/2$  and  $M = N = 3/2$ . The last constant  $L$ , which cannot be determined with our current specimens (Fig. 6.3), would require a sample extracted in the plane with normal along the 1-direction. However, given the above material constants, it is reasonable to assume  $L = 3/2$ , so that (6.3) reduces to the classical von Mises isotropic yield criterion.



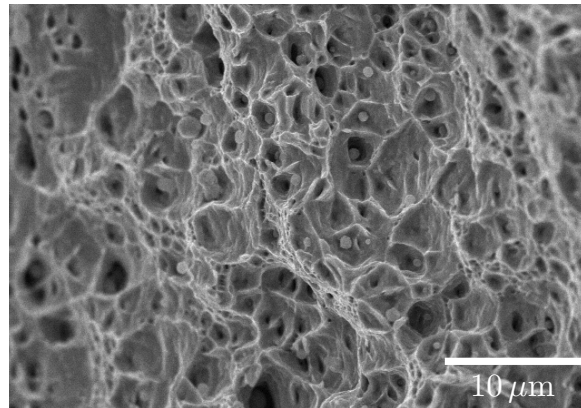
(a) Room temperature.  $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$



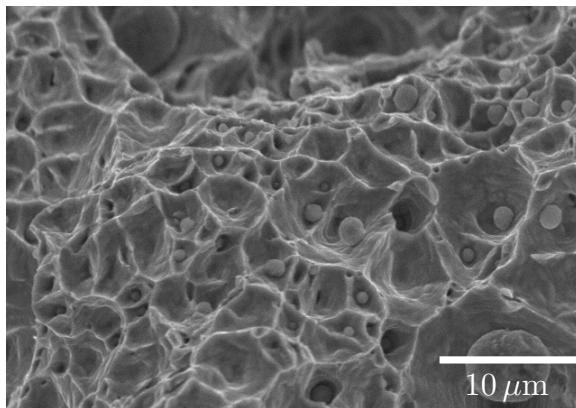
(b) Room temperature.  $\dot{\epsilon} = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$



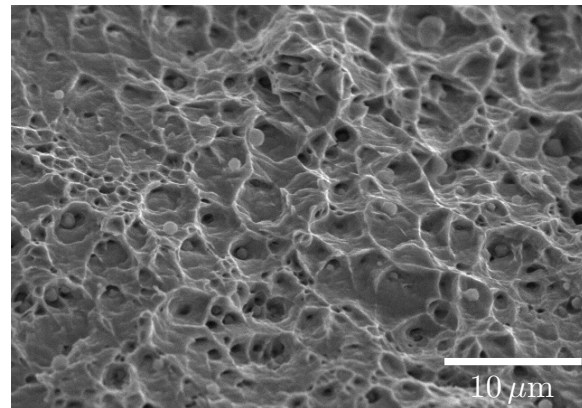
(c) 50°C.  $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$



(d) Room temperature.  $\dot{\epsilon} = 10^{-1} \text{ s}^{-1}$



(e) 100°C.  $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$



(f) Room temperature.  $\dot{\epsilon} = 1 \text{ s}^{-1}$

Figure 6.8 SEM micrographs of the fracture surface of the axial tension samples at various temperatures and strain-rates

#### 6.4.4 Constitutive modelling

Based upon the aforementioned observations regarding material isotropy, strain-rate and temperature sensitivity, a suitable theory for representing the behaviour of austenitic stainless steel E309L is required for modelling, and optimizing the industrial hammer peening process. The Johnson-Cook plasticity model (Johnson and Cook, 1983) was found to be a suitable constitutive model. Here, we summarize the main developments of the theory.

The infinitesimal strain tensor is assumed to admit the following decomposition

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p, \quad (6.4)$$

into elastic and incompressible plastic strain, respectively, with  $\text{tr } \mathbf{E}^p = 0$ .

The Cauchy stress  $\mathbf{T}$  is given by the elastic stress-strain relationship

$$\mathbf{T} = 2\mu(\mathbf{E}^e)_0 + \kappa(\text{tr } \mathbf{E}^e)\mathbf{1}, \quad (6.5)$$

with  $\mu > 0$  and  $\kappa > 0$  the elastic shear and bulk moduli, and

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3/2} |\mathbf{T}_0|, \quad (6.6)$$

an equivalent tensile stress. Next, the equivalent tensile strain-rate is

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \sqrt{2/3} |\dot{\mathbf{E}}^p|, \quad (6.7)$$

from which the total equivalent tensile plastic strain is obtained

$$\bar{\epsilon}^p = \int_0^t \dot{\bar{\epsilon}}^p d\zeta. \quad (6.8)$$

Whenever there is plastic flow, the magnitude of the equivalent tensile stress is constrained to satisfy

$$\bar{\sigma} = \mathcal{S}(\bar{\epsilon}^p, \dot{\bar{\epsilon}}^p, \theta), \quad (6.9)$$

where the function  $\mathcal{S}(\bar{\epsilon}^p, \dot{\bar{\epsilon}}^p, \theta)$  represents the flow strength of the material. Next, it is assumed that

$$\mathcal{S}(\bar{\epsilon}^p, \dot{\bar{\epsilon}}^p, \theta) = Y(\bar{\epsilon}^p, \theta) g(\dot{\bar{\epsilon}}^p), \quad (6.10)$$

where  $Y(\bar{\epsilon}^p, \theta) > 0$  is a positive-valued scalar rate-independent strain-hardening function and  $g(\dot{\bar{\epsilon}}^p)$  is a positive-valued strictly increasing rate-sensitivity function of  $\dot{\bar{\epsilon}}^p$ , with  $g(0) = 0$ .

From (6.9)-(6.10), we define

$$R(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}^p, \dot{\bar{\epsilon}}^p, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathcal{S}(\bar{\epsilon}^p, \dot{\bar{\epsilon}}^p, \theta)}{Y(\bar{\epsilon}^p, \theta)} = g(\dot{\bar{\epsilon}}^p), \quad (6.11)$$

a yield stress ratio.

The three-dimensional Johnson-Cook theory assumes the following form for the rate-sensitivity function

$$g(\dot{\bar{\epsilon}}^p) = 1 + C \ln \left( \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\dot{\epsilon}_0} \right) \quad (6.12)$$

where  $C$  a dimensionless material constant and  $\dot{\epsilon}_0$  a reference strain-rate. Using (6.11), the rate-sensitivity function may then be inverted so that

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \dot{\epsilon}_0 \exp \left( \frac{1}{C} [R(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}^p, \dot{\bar{\epsilon}}^p, \theta) - 1] \right), \quad (6.13)$$

is the flow rule . Next, the strain-hardening variable  $Y(\bar{\epsilon}^p, \theta)$  is assumed to have the following isotropic form

$$Y(\bar{\epsilon}^p, \theta) = [A + B (\bar{\epsilon}^p)^n] [1 - \hat{\theta}^m] \quad (6.14)$$

with material constants  $A, B, n$  and  $m$ . The non-dimensional temperature  $\hat{\theta}$  is defined as

$$\hat{\theta} = \begin{cases} 0 & \text{for } \theta < \theta_R, \\ \frac{\theta - \theta_R}{\theta_m - \theta_R} & \text{for } \theta_R \leq \theta \leq \theta_m, \\ 1 & \text{for } \theta > \theta_m, \end{cases} \quad (6.15)$$

where  $\theta_R$  and  $\theta_m$  defines reference and melting temperatures, respectively. The theory was implemented in our finite element code through a user material subroutine.

Calibration of the material parameters was done following Dorogoy and Rittel (2009), and the final values are given in Table 6.4. These values compare to those of a similar steel, AISI304L, as measured by Maurel-Pantel et al. (2012). The corresponding fits are shown in Figs. 6.9, where the experimental true stress-strain curves are compared to the theory. The quality of the fit to both room and elevated temperature stress-strain curves is good.

## 6.5 Conclusions

In conclusion, the following have been investigated for the 75% Ar / 25% CO<sub>2</sub> flux-cored arc welded austenitic stainless steel E309L filler :



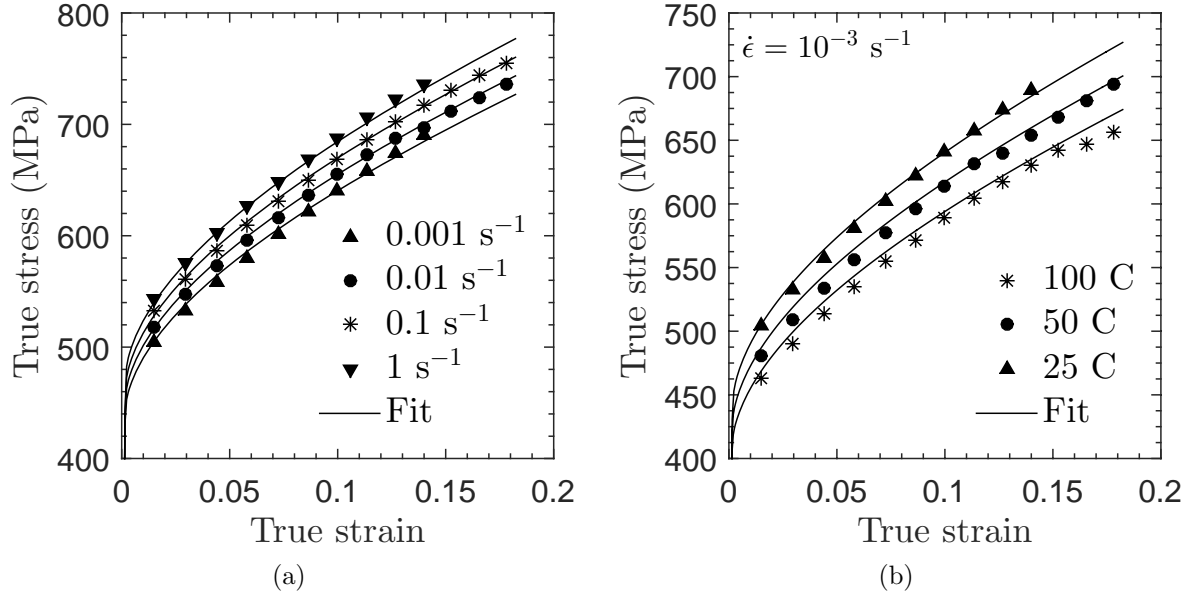


Figure 6.9 Fit of the Johnson-Cook constitutive theory to (a) room temperature true stress-strain curves for four nominal strain-rate levels; and (b) true stress-strain curves at three temperatures, but fixed strain-rate  $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ . The experimental data shown is sampled from the actual data for visualization

Tableau 6.4 Material parameters for the Johnson-Cook theory

$\kappa$ (GPa)	$\mu$ (GPa)	$A$ (MPa)	$B$ (MPa)	$n$	$m$	$\theta_m$ (K)	$\theta_R$ (K)	$C$	$\dot{\epsilon}_0$ ( $\text{s}^{-1}$ )
166.7	76.9	440	700	0.55	1.0	1673	298	0.01	$10^{-3}$

- In the range of strain-rates  $\{10^{-3}\text{-}10^0 \text{ s}^{-1}\}$ , the material's response is shown to be rate-sensitive, with an average rate-sensitivity parameter  $q = 0.0105$ ;
- The response is also temperature-sensitive for temperatures up to  $100^\circ\text{C}$ . Further, considering a typical exponential dependence of stress on temperature, the temperature-sensitivity parameter is  $p = 2.68$ ;
- An isotropic Johnson-Cook plasticity model for the elastic-plastic mechanical response is found to accurately predict the aforementioned experimental results.

The industrial hammer-peening procedure used, together with welding, for in-situ hydro-turbine crack repairs using E309L is currently calibrated using empirical techniques. For an

in-depth modelling and optimization of said process, essential information about the material properties and response of the filler material, E309L, is required. Hence, the experimental results and constitutive theory reported in this paper will prove useful.

## **6.6 Acknowledgements**

The authors would like to thank the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC) for their financial support. The support of the Consortium de Recherche en Fabrication et Réparation des Roues d'Eau (CReFaRRE), Hydro-Québec, and Alstom is also gratefully acknowledged. The help of Carlo Baillargeon at Hydro-Québec and Sider-Tech inc. in providing us with the E309L stainless steel samples is gratefully acknowledged.

# CHAPITRE 7 ARTICLE 4 : TRAJECTORY OPTIMIZATION OF INDUSTRIAL HAMMER PEENING OF WELD SEAMS USING SEQUENTIAL APPROXIMATE OPTIMIZATION

J. Luk-Cyr, A. Vadean , H. Champlaud, J. Lanteigne

\* This paper is under revisions as of March 4th, 2017 in *Optimization and Engineering*.

## 7.1 Abstract

The purpose of this paper is to provide a methodology for optimizing the sinusoidal trajectory commonly employed in industrial hammer peening using a sequential approximate optimization algorithm. We have found that a suitable sinusoidal trajectory allows for a more efficient process when compared to a linear trajectory without loss of quality of the residual stress state. Furthermore, this mathematics- plus finite element- based algorithm allows for significant computational cost savings without loss of accuracy. Furthermore, a new measure - the peening uniformity - is introduced and may serve as a novel hammer peening indicator as it provides additional information about the homogeneity of the induced deformation and concomitant secondary peening effects.

## 7.2 Introduction

It has been shown that crack propagation rate may be decreased by introducing a suitable compressive residual stress field underneath the region of interest (Curtat, 2016). Therefore, several methods have been developed for such, thus increasing fatigue strength by plastically deforming the surface of large structures. Peening methods, such as shot peening for instance, are widely used in the industry (Meguid et al., 1999) and have proven useful not only to enhance fatigue strength, but also for sheet metal forming and other industrial applications (Gariépy et al., 2011). Methods such as needle peening, ultrasonic peening and laser peening are also increasingly popular methods when localized enhancement is required or when shot peening is found to produce too much plastic distortion for the problem at hand. In contrast, Kirkhope et al. (1999) noted that hammer peening is the peen method producing the highest improvement in fatigue strength. This is partially due to the large amount of plastic work produced, which results in compressive residual stress deeper in the structure. When automated, such as with the SCOMPI robot currently used for the maintenance of Hydro-Québec's hydroturbines (Simoneau et al., 2009), hammer peening proves to be particularly efficient at

increasing the quality of weld bead repairs by delaying lateral crack propagation in said weld bead and this, over a wide region (Hacini et al., 2009).

From a technological perspective, calibration of the industrial hammer peening operating parameters (e.g. head speed, impact frequency, tool geometry, peening trajectory) currently relies mostly on empirical knowledge and experience. Although previous authors have used the finite element method (FEM) to describe hammer peening (Branco et al., 2004; Frija et al., 2006; Liu et al., 2009; Baptista et al., 2011), most work emphasize on the particular modelling of the process rather than the finding of optimal operating parameters. Recently, we (Luk-Cyr et al., 2016) proposed a sequential approximate optimization (SAO) methodology to identify a set of optimal hammer peening parameters by minimizing stress-based objective variables. Highlights of this method include significant computational cost savings through surrogate modelling and multi-objective optimization. Using this SAO methodology, Luk-Cyr et al. (2016) found a set of optimal<sup>1</sup> industrial hammer peening operating parameters for a *linear peening* trajectory.

However, in practice, surface areas requiring hammer peening may be larger and hammer peening following a linear trajectory is time-consuming and seldom used. For this reason, hammer peening is usually carried following a sinusoidal trajectory, or peening path, thus reducing the time required to achieve a particular peening coverage  $c_t$  (Miao et al., 2011). Yet again, we find ourself in a situation where one might ask *which sinusoidal path is optimal, or is the saving in peening time obtained at the detriment of peening quality compared to linear peening?* The objective of this paper is thus to briefly compare the benefits of sinusoidal peening over linear peening, and thereafter construct an adequate optimization problem for finding the optimal sinusoidal hammer peening trajectory. The latter will be solved using the SAO methodology discussed in Bonte et al. (2008); Luk-Cyr et al. (2016).

In what follows, the finite element model is presented in Sect. 7.3. Then, in Sect. 7.4, a preliminary investigation is carried in order to provide additional information for constructing the optimization problem, the latter being presented at the end of said section. The SAO algorithm for solving the optimization problem is summarized in Sect. 7.5. Finally, details of our optimization results are discussed in Sect. 7.6, and we conclude in Sect. 7.7.

### 7.3 Finite element modelling

The industrial hammer peening process is implemented into the FEM software Abaqus following Luk-Cyr et al. (2016), among others. For optimization purposes, we modelled a  $W = 8$

---

1. The use of *optimal* in this multi-objective context refers to Pareto optimality.

mm wide representative plate with thickness  $H = 5$  mm, length  $L = 10$  mm, and with a centered ellipsoid weld bead with dimensions  $t = 4$  mm and  $h = 0.5$  mm, as shown in Fig. 7.1. The mesh contains three-dimensional, fully-integrated eight-node elements (C3D8) near the

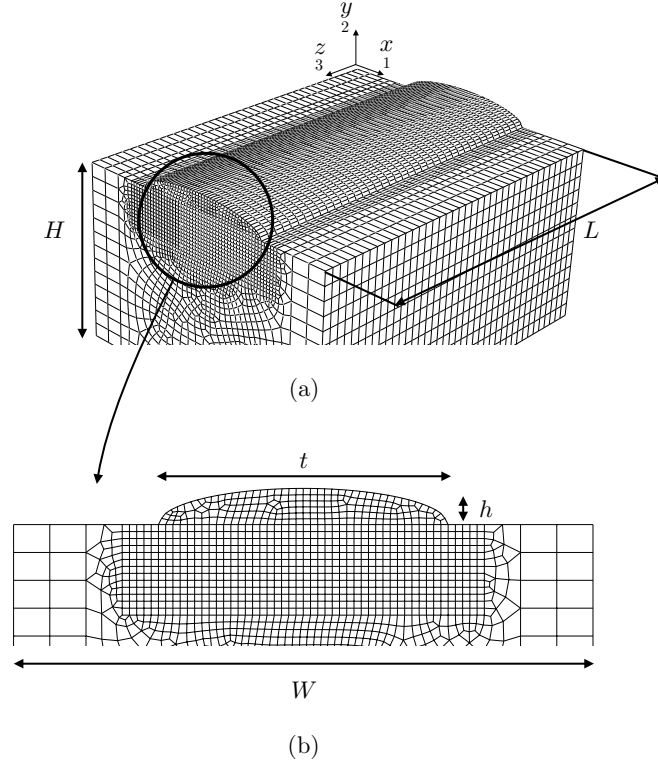


Figure 7.1 Finite element mesh and dimensions. (a) Overall view with orientation tryad ; and (b) weld bead

weld bead (refined region), while three-dimensional, reduced-integration eight-node elements (C3D8R) are used away from the weld bead. The number of elements in both the refined and unrefined regions were set following a convergence analysis of the objective variables. The plate is made of 304L stainless steel whose stress-strain curve is given in Fig. 7.2, and is modelled as an initially stress-free, homogeneous isotropic material with classic J2-plasticity.

The mesh is constrained as follows :

- The bottom nodes of the plate are constrained in the normal, 2-direction ;
- The remaining four edges of the plate are clamped, representing fixtures used to hold the plate in place while it is hammer peened. The top nodes are free of constraints.

Following Frija et al. (2006); Hacini et al. (2009); Sanjurjo et al. (2014); Mann et al. (2015); Luk-Cyr et al. (2016), the impacting hammers are modelled using analytical rigid surfaces

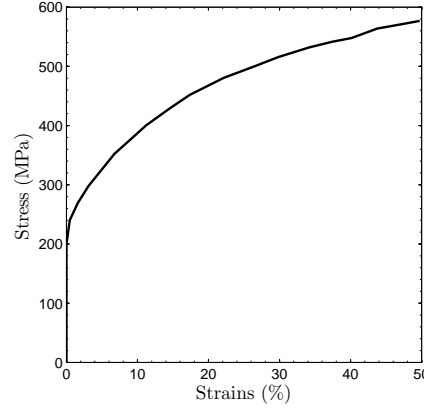


Figure 7.2 True stress vs true strain curve for stainless steel 304L

and are semi-spherical in shape, with tool-tip radius  $R$  and diameter  $D$  which values are given in Table 7.1.<sup>2</sup> The contact algorithm between the hammer and the top of the plate is a standard augmented lagrangian with friction coefficient  $\mu = 0.25$  (Meguid et al., 2002; Gariépy et al., 2011).

### 7.3.1 Hammer peening path

During the industrial hammer peening process, the hammer is moved along the weld bead at a pre-determined longitudinal head-speed  $v$ , and hits the bead surface at a given impact frequency  $f$ .<sup>3</sup> Furthermore, the tool is commonly given a sinusoidal transverse motion with amplitude  $A$  and frequency  $\omega$ , as shown in Fig. 7.3 for  $A = t/2$ . The longitudinal head-speed  $v$  and impact frequency  $f$  solely determine the longitudinal (3-direction) positions  $z_i$  of the impacts, while  $A$  and  $\omega$  determine the transverse (1-direction) position  $x_i$  of the impact locations (indicated by a  $\bullet$  in Fig. 7.3).

The main reason for specifying a sinusoidal hammer peening path instead of a linear path is to reduce the time required to achieve a particular peening coverage  $c_t$ . Peening coverage measured at the end of the hammer peening process is obtained by taking the ratio of the area effectively covered by impact dimples and the total area of the region of interest and is expressed as a percentage (SAE-J2277, 2009). It should be noted that the method for evaluating peening coverage  $c_t$  is somewhat subjective since the definition of an “impact

2. In practice, the hammer inclination is also specified. However, as discussed in Luk-Cyr et al. (2016), said value does not significantly affect the residual stress state and will therefore not be considered in this paper.

3. We note that Hydro-Québec also uses impact energy as a fixed parameter which is difficult to control. However, as discussed in Luk-Cyr et al. (2016), a constant imprint depth is applied.

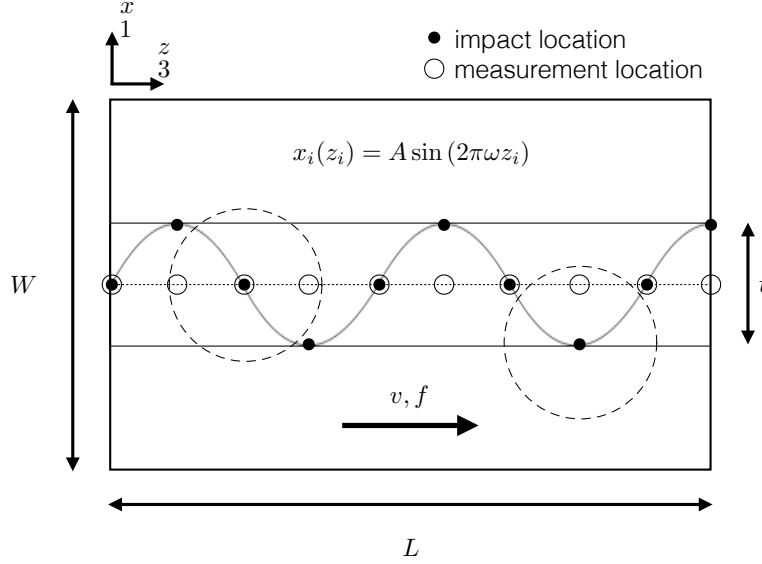


Figure 7.3 Sinusoidal motion of the hammer peening tool. The longitudinal head-speed  $v$  and impact frequency  $f$  define the impact locations  $z_i$ , while  $A$  and  $\omega$  determine  $x_i$  through the sine equation. Impact locations are indicated by  $\bullet$ , while objective variables are measured at locations indicated by  $\circ$ . The dashed circles are examples of the impact area. The example shown is for  $A = t/2$

dimple” is not always clear. Hereinafter, we define peening coverage as follows :

$$c_t = \frac{\text{Area effectively covered with dimples}}{\text{Area of the region of interest}} \quad (7.1)$$

where the “area covered with dimples” is restricted to the “area where the hammer left an imprint and where normal (2- direction) displacements are negative”. With the above definition, regions of material pile-up commonly observed in indentation experiments are not considered to be “effectively covered” and do not count towards peening coverage.

Although  $c_t$  is expected to increase with a sinusoidal peening motion, no concluding results has yet been obtained concerning whether or not the resulting residual stress state benefits from such. Alternatively, and from a technological perspective, Luk-Cyr et al. (2016) have proposed stress-based hammer peening monitors to assess the “quality” of a set of hammer peening operating parameters. Those are summarized as follows :

- $\sigma_i^{\text{compr}}$ ,  $i = \{1, 3\}$  – The maximum compressive residual stress in the  $i^{\text{th}}$  component at measurement location  $z_i$  (indicated by  $\circ$  in Fig. 7.3) located at depth  $y_i^{\text{compr}}$ . It is indicated by a  $\bullet$  in Fig. 7.4;
- $\Delta y_i$ ,  $i = \{1, 3\}$  – The range of the compressive zone. It is indicated by the dashed lines

in Fig. 7.4;

- $y_i^{\text{start}}$ ,  $i = \{1, 3\}$  – The depth at which residual compressive stress begins at location  $z_i$  (left intersection in Fig. 7.4); and
- $\Delta x_i$ ,  $i = \{1, 3\}$  – The lateral distance from the center of the weld bead, measured at depth  $y_i^{\text{compr}}$ , from measurement location  $z_i$  (indicated by  $\circ$  in Fig. 7.3) within which the compressive stress remains above 80% of  $\sigma_i^{\text{compr}}$ .

These quantities will hereinafter serve as our objective variables in our optimization problem. More specifically, since there are multiple measurement locations ( $\circ$ ), these objective variables are instead taken as the average over all measurement and thereafter denoted with a bar ( $\bar{\cdot}$ ).

We emphasize that measurements of the objective variables are made at locations  $(z_i, x_i = 0)$  at the center of the weld bead (indicated by  $\circ$ ) and not necessarily at impact locations ( $\bullet$ ), as shown in Fig. 7.3. The reasons are two-fold. First, tensile residual stress arising from welding processes are often maximum in a region near the center of the weld bead, and therefore hammer peening improvement should be measured accordingly. Second, comparison of the benefits of a sinusoidal path over a centered linear path requires that measurements are made at the same locations. We further note that although other regions are also of interest (e.g. it is not necessarily good to peen over the HAZs areas), this comparison is mainly for the purposes of identifying and understanding the key parameters distinguishing linear and sinusoidal peening. From an operational perspective, benefits of a sinusoidal trajectory include reduced peening time and increased surface coverage. The interest to study a sinusoidal path is even higher as the welding width becomes larger and multiple linear peening passes are required.

## 7.4 Preliminary investigation

In our case, a convenient way to analyze a sinusoidal trajectory is to express the frequency  $\omega$  as

$$\omega = \frac{N_c}{L}, \quad (7.2)$$

where  $N_c$  is the number of prescribed cycles and  $L$  is the length of the weld bead. Then,

$$x_i(z_i) = A \sin\left(\frac{2\pi N_c}{L} z_i\right). \quad (7.3)$$

Thus knowing the longitudinal positions  $z_i = \hat{z}_i(v, f)$ , the sinusoidal trajectory is determined by  $N_c$  and  $A$ . To assess the effect of each parameter on the objective variables, we varied  $0 \leq N_c \leq 8$  keeping  $A = t/2$  mm fixed, and then varied  $0 \leq A \leq \frac{3t}{4}$  mm keeping  $N_c = 2$



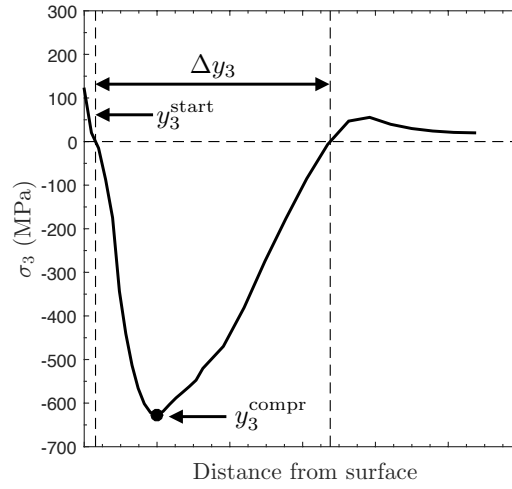


Figure 7.4 Typical longitudinal residual stress curve vs depth at measurement location  $z_i$ . The peened face is at 0. Dashed lines indicate transition from tension to compression, and vice-versa

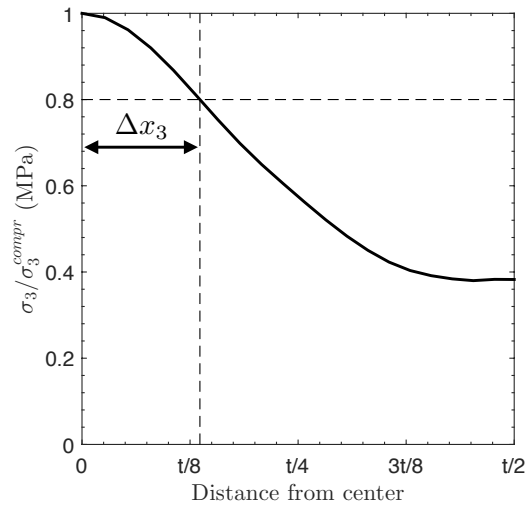


Figure 7.5 Typical normalized longitudinal residual stress curve vs transverse (1 direction) from measurement location  $z_i$ . The curve is taken at a depth  $y_3^{\text{compr}}$  from the surface. Dashed lines indicate distance after which  $\sigma_3^{\text{compr}}$  has decayed to 80% of  $\sigma_3^{\text{compr}}$ .  $t$  is the width of the weld bead

fixed. The hammer geometry, longitudinal head-speed and impact frequency are chosen to be the results of Luk-Cyr et al. (2016) for a linear peening path and are summarized in Table 7.1.<sup>4</sup>

Tableau 7.1 Hammer peening parameters for a linear peening path [Taken from Luk-Cyr et al. (2016)]

D (mm)	R (mm)	v (mm/s)	f (Hz)
10.1	29.9	7.9	21.2

The results are shown in Figs. 7.6 where in each graph, data points with abscissa 0 corresponds to the linear path results of Luk-Cyr et al. (2016). The following may be observed :

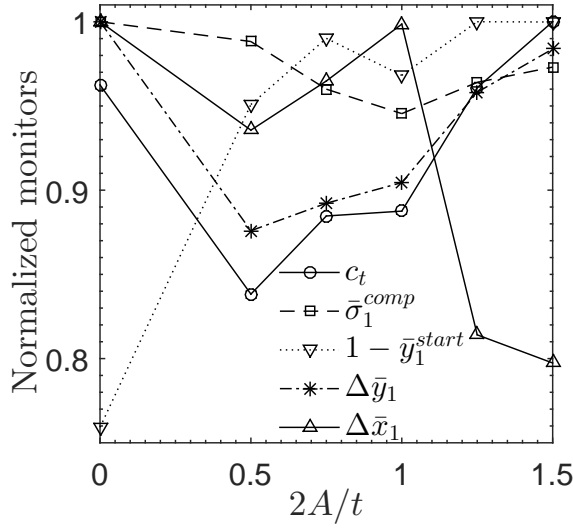
- From Figs. 7.6(a)-(b), peening coverage  $c_t$  may be increased with a suitable choice of sine parameters. Furthermore, there is a clear improvement in the  $\bar{y}_1^{\text{start}}$  monitor when using a sinusoidal path.
- From Figs. 7.6(c)-(d), linear peening yields slightly better overall results than sinusoidal peening for the longitudinal (3-direction) monitors, with the exception of  $\bar{y}_3^{\text{start}}$ , which remains constant for all scenarios. As in Figs. 7.6(a)-(b), there seems to exist a set of  $A$  and  $N_c$  where both peening paths yield similar results.

In light of these observations, it is of interest to find an approximation of the optimal set of  $A$  and  $N_c$  which yields a residual stress state combining the benefits of a linear and sinusoidal peening path. More specifically, the sinusoidal peening path shows an increase in peening coverage  $c_t$ , but most notably a significant decrease in the  $\bar{y}_1^{\text{start}}$ , which indicates the depth at which compressive residual stress begins.<sup>5</sup> This is ever more important from a practical point of view since it has been shown that a decrease in surface crack propagation rate can be attributed to a sufficiently deep compressive stress field surrounding the new born cracks (Curtat, 2016).

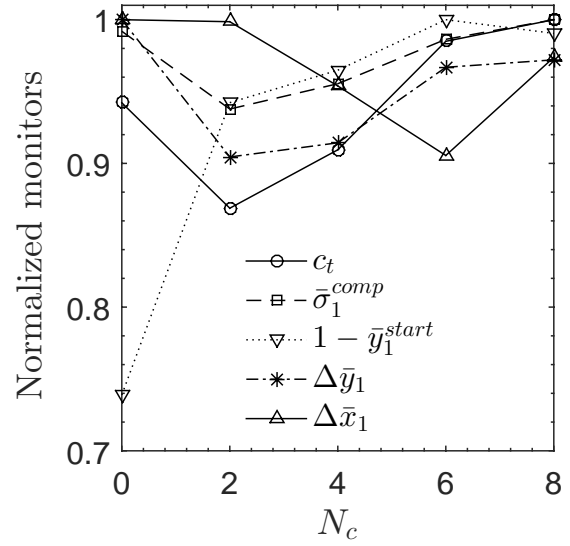
We note that since the impact frequency  $f$  and head-speed  $v$  were fixed to previously obtained values, the number of impacts was fixed as well. Thus, choosing high values of  $N_c$  (number of cycles) without further consideration may lead to an inappropriate representation of the prescribed sinusoidal trajectory. In other words, “sampling” at too few impact locations may lead to aliasing, as illustrated in Fig. 7.7.

4. Although not necessarily optimal for the sinusoidal trajectory, it serves as a basis for our analysis. Any optimized trajectory obtained will therefore be optimal for this set of parameters.

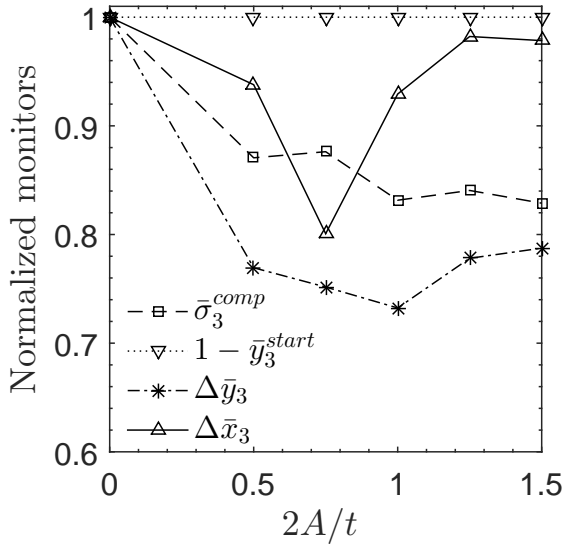
5. By an increase of  $1 - \bar{y}_1^{\text{start}}$ , we infer that compressive residual stress begins closer to the peened surface.



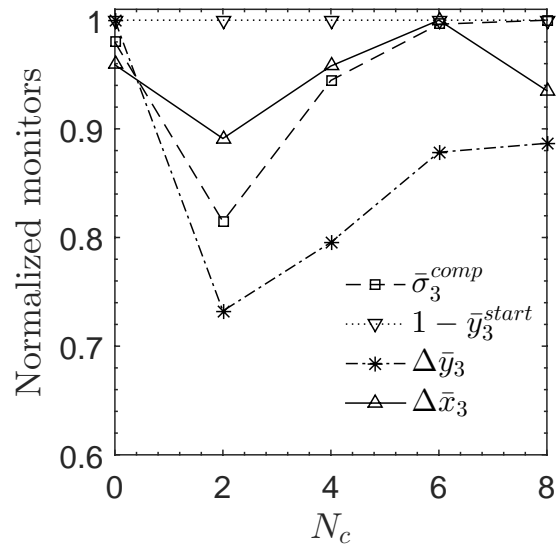
(a) Effect of amplitude  $A$  on coverage  $c_t$  and transverse objective variables with  $N_c = 2$ .



(b) Effect of number of cycles  $N_c$  on coverage  $c_t$  and transverse objective variables with  $A = t/2$  mm.



(c) Effect of amplitude  $A$  on longitudinal objective variables with  $N_c = 2$ .



(d) Effect of number of cycles  $N_c$  on longitudinal objective variables with  $A = t/2$  mm.

Figure 7.6 Effect of amplitude  $A$  and number of cycles  $N_c$  on normalized objective variables (monitors). The operating parameters used are given in Table 7.1 and fixed for all graphs. Data points at  $A = 0$  or  $N_c = 0$  are the optimized results for a linear trajectory taken from Luk-Cyr et al. (2016). An ordinate value of 1 indicates the best scenario.

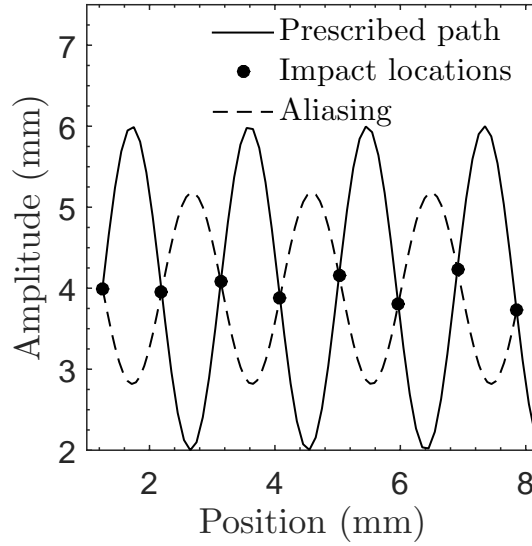


Figure 7.7 Prescribing a set of incompatible design parameters  $v$ ,  $f$  and  $N_c$  may not yield the desired sinusoidal trajectory. The prescribed path is obtained when  $N_s \geq 1$

To circumvent this problem, we make use of the Nyquist frequency theorem, which states that the sampling frequency  $\omega_s$  must be at least twice the signal's frequency  $\omega$ .<sup>6</sup> Introducing a sampling multiplier  $N_s$ , we have

$$N_s \omega \leq \frac{\omega_s}{2}, \quad N_s \geq 1, \quad (7.4)$$

where  $\omega$  is given by (7.2), and  $\omega_s$  is the Nyquist sampling frequency, given by

$$\omega_s = \frac{f}{2v}. \quad (7.5)$$

Combining (7.2), (7.4) and (7.5), we have the following criterion for the longitudinal head-speed

$$v \leq \frac{fL}{4N_s N_c}, \quad (7.6)$$

where  $N_s$  controls the “density” at which the sinusoidal path is “sampled”. In other words, the design parameters for the optimization of the sinusoidal trajectory are  $A$ ,  $N_c$  and  $N_s$ . Furthermore, it requires that the longitudinal head-speed  $v$  be adjusted according to (7.6) to avoid aliasing.

---

6. For the spatial domain considered in this paper, frequency has units of 1/mm.

### 7.4.1 Peening uniformity

In shot and needle peening, coverage  $c_t$ , together with intensity<sup>7</sup> are commonly used as measures of “peening quality”. However, as defined in (7.1), the peening coverage measure lacks the necessary information for concluding on the homogeneity of the induced deformation. In the case of a single impact for instance, peening coverage  $c_t$  returns that the center of the dimple is “as much covered” as the edge of the dimple, although the residual stress state is necessarily different at the two locations.

Therefore, we introduce an additional quantity

$$u_t = \frac{1}{c_t} \int_{A(c_t)} g(x, y) da \quad (7.7)$$

the peening uniformity, with  $A(c_t)$ , the covered area as defined in (7.1) and  $0 < g(x, y) \leq 1$ , a normalized weight function. This weight function is worth 1 wherever the dimple is deepest in the covered area  $A(c_t)$ . A uniformity “map” is shown in Fig. 7.8 as an example, alongside the corresponding peening coverage map for a typical sinusoidal hammer peening path. The latter gives the covered area, while the former indicates the relative uniformity of the deformation in that area.

### 7.4.2 Sensitivity analysis

A methodology proposed in Luk-Cyr et al. (2016) to better assess the influence of each design parameters on the objective variables, individually, involves using the *Bayesian Information Criterion* (Posada and Buckley, 2004; Anderson, 2008), which is given by

$$BIC_{i,j} = -2 \log(\mathcal{L}_{i,j}) + \log(K), \quad (7.8)$$

where  $\mathcal{L}_{i,j}$  is the loglikelihood value obtained from simple regression of objective variable  $y_i$  with design parameter  $x_j$  using  $K = 10 \times M$  black-box observations,  $M$  being the number of design parameters. This criterion represents goodness of fit and parsimony<sup>8</sup>, so that the lowest  $BIC_{i,:}$  score indicates the design parameter which influences objective variable  $y_i$  the most. We further introduce

$$\overline{BIC}_{i,:} = 1 - \frac{BIC_{i,:}}{\max(BIC_{i,:})}, \quad (7.9)$$

so that  $\overline{BIC}_{i,:} = 1$  represents the most influential parameter on objective  $y_i$ . The normalized BIC scores are shown in Fig. 7.9 and the following may be observed :

---

7. Also known as Almen intensity, which relates to the deflection of an Almen strip.  
 8. A measure representing the amount of “over-fitting”.

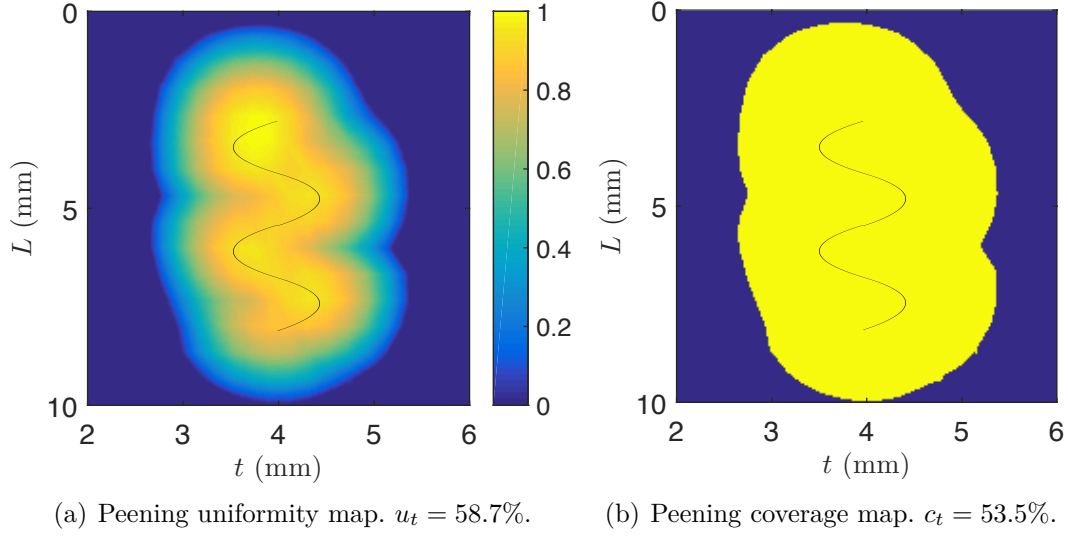


Figure 7.8 Typical surface maps for computing (a) peening uniformity; and corresponding (b) peening coverage. The latter lacks the necessary information for concluding on uniformity of the induced deformation. Approximate peening path is shown

- $N_s$  influences  $\bar{\sigma}_3^{\text{comp}}$  the most, but has little effect on  $\bar{y}_3^{\text{start}}$  and  $\Delta\bar{x}_3$ ;
- $N_c$  influences  $\bar{\sigma}_1^{\text{comp}}$ ,  $\bar{y}_1^{\text{start}}$  and  $\Delta\bar{y}_3$  the most, but has little effect on  $\bar{y}_3^{\text{start}}$  and  $\Delta\bar{x}_3$ ;
- $A$  influences  $\Delta\bar{y}_1$  and  $\Delta\bar{x}_3$  the most; but has little effect on  $\bar{y}_3^{\text{start}}$ .

Table 7.2 summarizes the design and objective variables presented so far.

Tableau 7.2 Variables description

Variable	Description
$A$	amplitude
$N_c$	number of oscillations
$N_s$	Nyquist multiplier
$\bar{\sigma}_i^{\text{compr}}$	average maximum compressive stress
$\bar{y}_i^{\text{start}}$	average depth at which compressive stress begins
$\Delta\bar{y}_i$	average range of compressive region
$\Delta\bar{x}_i$	average width of 80% compressive region

Therefore, the optimization problem must include the three design parameters. However, since  $\bar{y}_3^{\text{start}} = 0$  remained constant for all  $K$  simulations, we choose to transform this objective variable into an equality constraint, thus reducing the optimization problem to seven objective variables, which is discussed next.

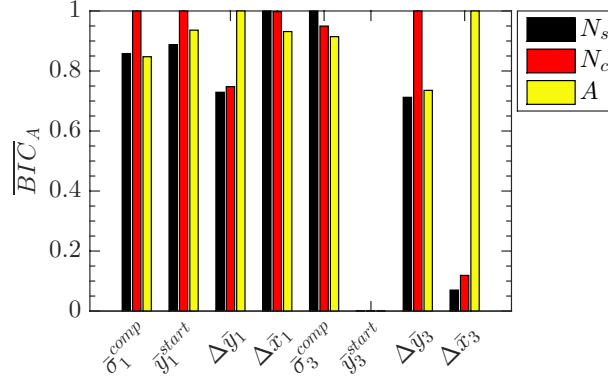


Figure 7.9 Normalized BIC score. Highest score indicates most influential design variable on corresponding objective.  $\bar{y}_3^{\text{start}}$  does not vary for the design parameters considered

### 7.4.3 Problem definition

The objective and design variables for optimizing the sinusoidal hammer peening trajectory are summarized in Table 7.3. We expressed the optimization problem as<sup>9</sup>

$$\begin{cases} \text{minimize}_{A, N_s, N_c \in \mathcal{X}} & \bar{\sigma}_i^{\text{compr}}, \bar{y}_1^{\text{start}}, -\Delta \bar{y}_i, -\Delta \bar{x}_i, \quad i = \{1, 3\}, \\ \text{subject to} & v = \frac{fL}{4N_c N_s}, \quad \bar{y}_3^{\text{start}} = 0, \end{cases} \quad (7.10)$$

where (7.6) was transformed into an equality constraint, and where  $\mathcal{X}$  represents the feasible design parameter space, as specified by the bounds of each design variable  $A$ ,  $N_c$  and  $N_s$ . In this problem, the three design parameters are found by minimizing seven objective variables. The hammer geometry  $D$ ,  $R$  and impact frequency  $f$  are fixed and given in Table 7.1.

Recall that peening coverage  $c_t$  and uniformity  $u_t$  have not been chosen as objective variables. Although some study suggests using peening coverage as a measure of peening quality for shot and needle peening (Gariépy et al., 2011; Romero, 2016), there is yet no agreement concerning the exact nature of this relationship. Therefore, we limit ourselves to the observation of the evolution of those quantities, instead of optimizing them.

## 7.5 Sequential approximate optimization algorithm (SAO)

Our finite element simulation may be viewed as a time-consuming black-box where only design and objective variables are available. Hereinafter, the term black-box refers to our finite element simulation. For such problems, it is desirable to approximate the black-box using a

9. Maximizing a function  $f(x)$  is equivalent to minimizing  $-f(x)$ .

Tableau 7.3 Design and objective variables for optimization of the sinusoidal trajectory

Variable	Units	Type	Value
$A$	mm	Design	$[0.5, 2.5]$
$N_c$	-	Design	$[1, 5]$
$N_s$	-	Design	$[1, 3]$
$\bar{\sigma}_1^{\text{compr}}$	MPa	Objective	Minimize
$\bar{y}_1^{\text{start}}$	mm	Objective	Minimize
$\Delta \bar{y}_1$	mm	Objective	Maximize
$\Delta \bar{x}_1$	mm	Objective	Maximize
$\bar{\sigma}_3^{\text{compr}}$	MPa	Objective	Minimize
$\Delta \bar{y}_3$	mm	Objective	Maximize
$\Delta \bar{x}_3$	mm	Objective	Maximize

so-called surrogate function (Jones et al., 1998; Booker et al., 1999) which shares similarities with the black-box, but is much cheaper to evaluate. A classic optimization algorithm may then be used to minimize this surrogate. Solutions thus obtained are then used as input for the black-box and a comparison can be made to compute the accuracy of said surrogate.

The process is repeated until sufficient accuracy between the black-box and surrogate function is achieved. Such a methodology is referred to as *sequential approximate optimization* (SAO) and is illustrated in Fig. 7.10. The algorithm's main steps are summarized here. A detailed description of its implementation for this type of problem is given in Luk-Cyr et al. (2016).

### 7.5.1 Summary of the SAO algorithm

The main steps of our SAO algorithm, as described in Sect. 7.5 Fig. 7.10, are summarized below :

- (i) *Initial FE Simulations* : Begin first iteration. Evaluate finite element black-box at  $K = 10 \times M$  points, denoted  $\mathbf{x}_0$ .  $M$  is the number of design variables ;
- (ii) If it is the first iteration, skip this step. Otherwise, add points from sequential improvement to the design space  $\mathbf{x}_0$  and evaluate ;
- (iii) *Black-box approximation* : Construct a kriging surrogate model  $\hat{y}_i$  for each objective,  $i = 1, \dots, N$ , using points  $\mathbf{x}_0$  ;
- (iv) *Multi-objective optimization* : Minimize the surrogate models using a multi-objective genetic algorithm and obtain the  $N$  dimension Pareto optima ;
- (v) *Pareto optima validation* : For each surrogate model, select the single Pareto optima which minimizes it. Evaluate those  $N$  points using the finite element black-box and



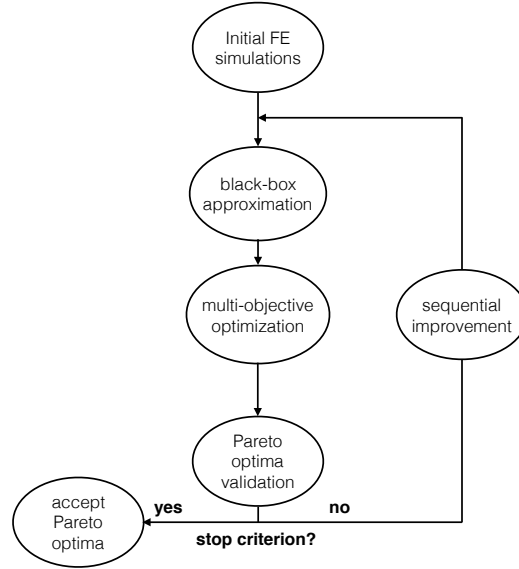


Figure 7.10 Workflow of a sequential approximate optimization algorithm

compute an error measure ;

- (vi) If the error is deemed acceptable, stop the algorithm ;
- (vii) *Sequential improvement* : Otherwise, add the  $N$  points computed in Step (v) to  $\mathbf{x}_0$
- (viii) *Sequential improvement* : For each surrogate model, select the single Pareto optima with maximum prediction variance. Also add those  $N$  points to  $\mathbf{x}_0$  ;
- (ix) Begin a new iteration. Repeat Steps (ii) to (ix).

### 7.5.2 Error measure

A relative model error measure is computed following (Couckuyt et al., 2014; Luk-Cyr et al., 2016). For each objective variable (1 to  $N$ ), we select the Pareto optima that minimizes the  $n^{\text{th}}$  objective (or surrogate model), which we denote  $\bar{x}_n^*$ . Then, those  $N$  points are re-evaluated using the finite element simulation. The relative error is computed as

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left| \frac{\hat{y}_i(\bar{x}_n^*) - y_i(\bar{x}_n^*)}{\hat{y}_i(\bar{x}_n^*)} \right|, \quad i = 1, \dots, N, \\ \bar{\epsilon} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \epsilon_i \end{aligned} \tag{7.11}$$

where  $\hat{y}_i(\bar{x}_n^*)$  is the  $i^{\text{th}}$  objective value of the  $n^{\text{th}}$  Pareto optima  $\bar{x}_n^*$ , and  $y_i(\bar{x}_n^*)$  is the exact finite element output at  $\bar{x}_n^*$ . Thus,  $\epsilon_i$  represents the error over  $N$  Pareto optima of the  $i^{\text{th}}$  surrogate model (objective function), and  $\bar{\epsilon}$ , the average over all models.

When the error measure (7.11) is below a predefined threshold, the solution is deemed acceptable. It is passed into the finite element simulation one last time to verify its validity.

### 7.5.3 Sequential improvement

When the error threshold is not attained, a learning step, also known as sequential improvement (see Fig. 7.10), is accomplished as follows :

- (a) The  $N$  Pareto optima obtained in Step (v) are added to the initial design space  $\mathbf{x}_0$  in Step (ii) ;
- (b) In addition, for each objective  $N$ , we select the Pareto optima exhibiting maximum prediction variance.  
These are also added to the initial design space  $\mathbf{x}_0$ . This method is known as diversification (Booker et al., 1999) ;
- (c) The current SAO iteration is completed and the algorithm is repeated.

By successively increasing the number of points in the design space of interest after each iteration, the surrogate model becomes increasingly accurate.

## 7.6 Results and discussion

The path optimization problem whose variables are listed in Table 7.3, converged after seven SAO iterations. The convergence plot of the relative model error  $\bar{\epsilon}$  in (7.11) against the number of SAO iterations is shown in Fig. 7.11. After seven SAO iterations, the model error is less than our stop threshold of 5%. It can be seen that the initial model error is significant. This can be attributed to the size of the initial design space, which we have chosen to include  $K = 10 \times M$  points, as suggested in Bonte et al. (2008). If for the present case the convergence is achieved rather rapidly, generally one must be careful when choosing the initial size of  $\mathbf{x}_0$  as it may result in more iterations required to achieve convergence.

Table 7.4 shows the number of SAO iterations, black-box (finite element simulations) and surrogate function evaluations done during our optimization. Each black-box evaluation took

Tableau 7.4 Number of evaluations until convergence

SAO loops	Black-box	Surrogate
7	90	$8.09 \times 10^5$

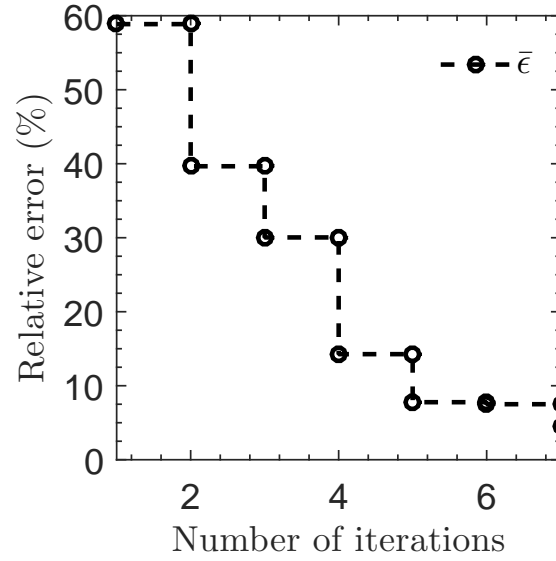


Figure 7.11 Plot of the model error versus the number of SAO iterations

Tableau 7.5 Selected solutions (blue circle in Fig. 7.12) which minimizes  $-\Delta\bar{x}_3$ . Also shown are finite element results for typically used operating parameters

Variable	Units	Optimization	Typical values
$N_s$	-	2.040	3.597
$N_c$	-	3.301	5.556
$A$	mm	1.703	2.0
$\bar{y}_1^{\text{start}}$	mm	0.0	0.01
$\bar{\sigma}_1^{\text{compr}}$	MPa	-317.4	-323.5
$\bar{\Delta}y_1$	mm	3.291	3.265
$\bar{\Delta}x_1$	mm	1.789	1.795
$\bar{\sigma}_3^{\text{compr}}$	MPa	-470.9	-467.6
$\bar{\Delta}y_3$	mm	4.462	4.364
$\bar{\Delta}x_3$	mm	1.953	1.205

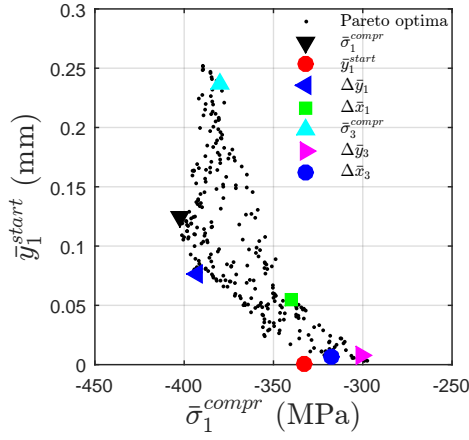
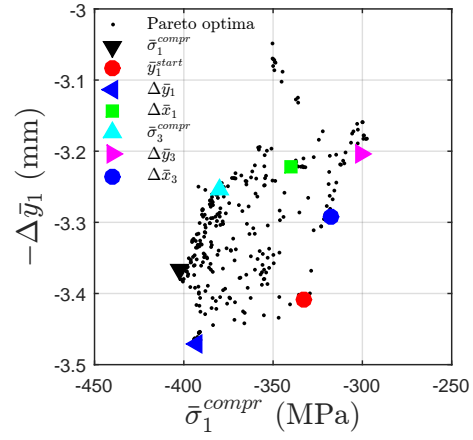
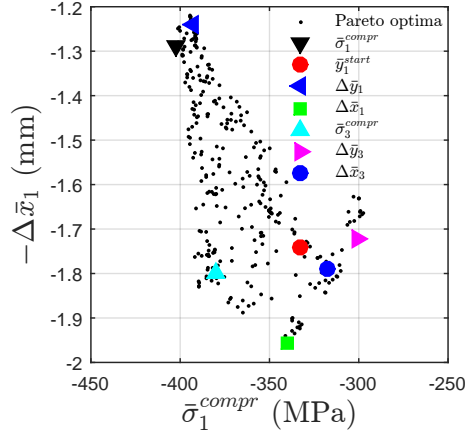
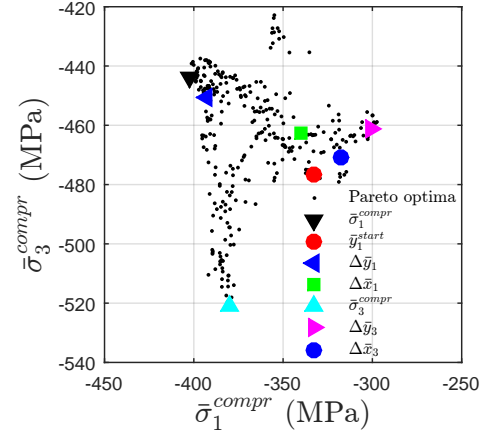
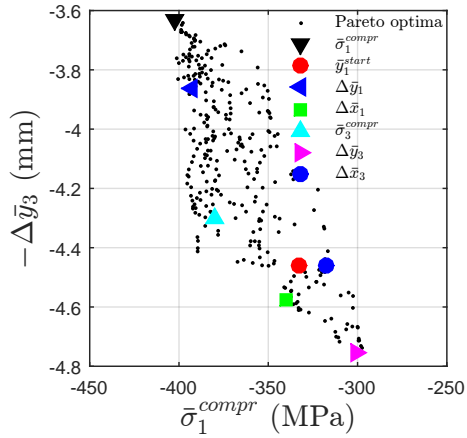
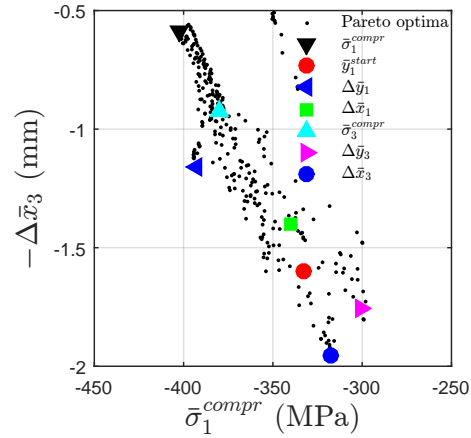
(a) Red marker minimizes  $\bar{y}_1^{start}$ .(b) Blue triangle marker minimizes  $-\Delta\bar{y}_1$ .(c) Green marker minimizes  $-\Delta\bar{x}_1$ .(d) Cyan marker minimizes  $\bar{\sigma}_3^{compr}$ .(e) Magenta marker minimizes  $-\Delta\bar{y}_3$ .(f) Blue circle minimizes  $-\Delta\bar{x}_3$ .

Figure 7.12 Plots of selected solutions in the seven dimension objective space

roughly three hours<sup>10</sup> compared to less than 0.1s for a surrogate evaluation. We note that in each SAO iteration, the black-box is evaluated in Steps (i), (ii) and (v), while the surrogate evaluations are done during Step (iv).

For visualization, approximated Pareto optima objectives were all plotted against  $\bar{\sigma}_1^{\text{compr}}$  as shown in Figs. 7.12. Approximated Pareto optima which minimizes at least one objective are emphasized with a colored marker and herein referred to as *selected solutions*. For instance, the green marker indicates the selected solution that minimizes  $-\Delta\bar{x}_1$ , but not necessarily the other objectives.

Deciding which trade-off solution to choose with seven objectives is difficult and, as discussed in Luk-Cyr et al. (2016), highly depends on the problem at hand and objectives of the operator. Therefore, user-input is essential at this stage.

As an example, the selected solution listed in Table 7.5 maximizes the average lateral extent of the compressive  $\Delta\bar{x}_3$ , at the expense of yielding lower average maximum compressive residual stress states. Numerical results for typical operating parameters are also shown in Table 7.5.<sup>11</sup> We note that similar results, as per the objective variables, can be achieved with lower values of  $N_s$ ,  $N_c$  and  $A$ , which results in reduced peening and simulation time.

Recall that in Sect. 7.3.1, we have opted not to choose peening coverage  $c_t$  as an objective variable since no concluding results have yet been obtained concerning whether or not the resulting residual stress state benefits from such. Instead, in Figs. 7.13, we provide graphs of coverage vs normalized value of the objective variables for all  $K = 90$  finite element simulations at an attempt at shedding light on these relationships. For each objective variable, a point corresponds to one simulation.

In Fig. 7.13(a), coverage is compared to  $\bar{\sigma}_1^{\text{compr}}$  and  $\bar{\sigma}_3^{\text{compr}}$ . Interestingly, the trend suggests that with an increase of peening coverage, the maximum residual compressive stress  $\bar{\sigma}_i^{\text{compr}}$  both decreases, which is opposite to what is usually found in the literature (c.f. Gariépy et al. (2011)). This can be explained as follows. In this work, peening coverage is maximized using as few impacts as possible, but optimally distributed, whereas in Gariépy et al. (2011), the number of impacts is increased until a certain peening coverage is achieved. The latter approach may be less desirable since it can lead to overpeening of certain areas which can lead to a dramatic drop in fatigue life, reduced surface hardness and surface crack initiations (Tekeli, 2002; Curtat, 2016).

In contrast, the range of the compressive zone  $\Delta\bar{y}_i$  and the lateral extent  $\Delta\bar{x}_i$  all seem to

---

10. Xeon CPU E5-2687 (8 cores) with 128GB RAM.

11. Typical values of  $N_s$  and  $N_c$  were calculated from basic operating parameters such as head-speed, impact frequency, etc..

increase with increasing coverage. This suggests that an equivalent optimization problem with one objective variable coverage  $c_t$  (to be maximized) instead of two  $\bar{\sigma}_i^{\text{compr}}$  (to be minimized) could be considered. Additionally, similar trends have been observed between the uniformity ( $u_t$ ) and the normalized objectives, as suggested in Fig. 7.13(d).

The peening uniformity  $u_t$  map, Fig. 7.8(a), can serve as a useful peening indicator, as it gives additional information on secondary effects of hammer peening. For instance, regions surrounding the homogeneously peened area are more at risk since we know they have not received the full hammer peening treatment. Based on our preliminary investigation, one could then expect a larger depth of tensile stress in those regions. The peening uniformity could also give insights on overpeened regions, as they would show up as localized regions on the uniformity map.

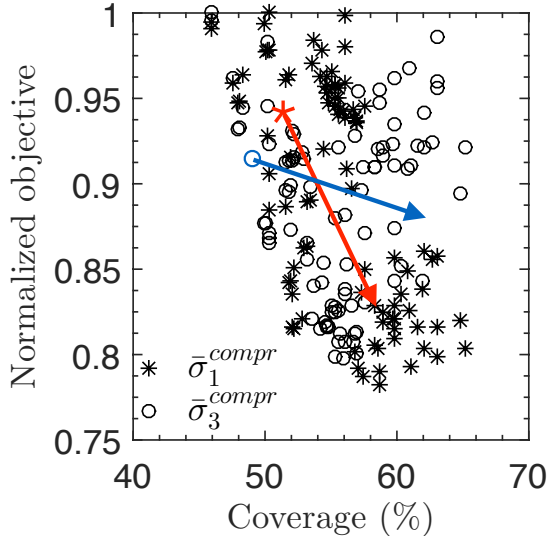
## 7.7 Conclusion

In this paper, we have described a methodology for finding an approximation of the optimal sinusoidal industrial hammer peening trajectory. To minimize computation cost associated with time-consuming finite element simulations, we have successfully applied a sequential approximate optimization algorithm where kriging is used as a surrogate, black-box approximation of this multi-dimensional problem. Multi-objective optimization was used to obtain the  $N$ -dimension approximation of the Pareto optima, from which a solution can be selected based on user-defined criterion.

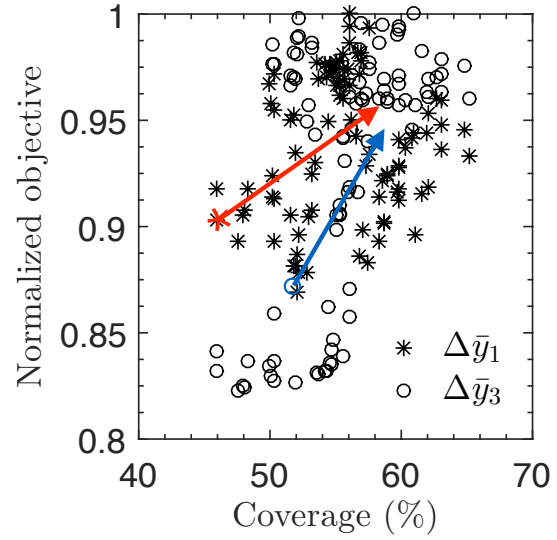
It has also been found that, given a proper choice of operating peening parameters, sinusoidal peening yield greater coverage  $c_t$  as well a compressive residual stress state closer to the surface, as described by  $y_i^{\text{start}}$ , than linear peening. From an operation point of view, these improvements are appreciated as sinusoidal peening is usually preferred over linear peening due to reduced number of peening passes, and thus expected peening time.

Furthermore, trends have been observed between peening coverage  $c_t$  and the stress-based objective variables. The residual compressive stress  $\bar{\sigma}_i^{\text{comp}}$  seem to decrease with increasing peening coverage, whereas peening depth and lateral extent,  $\Delta\bar{y}_i$  and  $\Delta\bar{x}_i$ , respectively increase.

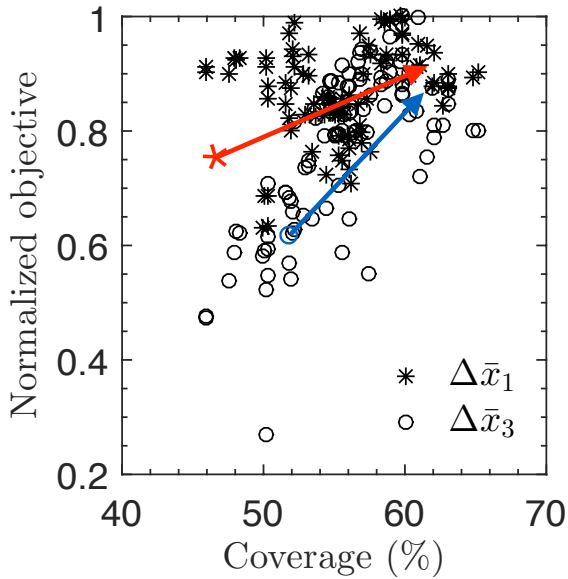
The peening uniformity  $u_t$  has been introduced as an additional peening indicator. Unlike the well known peening coverage  $c_t$ ,  $u_t$  provides information on the homogeneity of the induced deformation and therefore secondary information concerning the hammer peened surface. This may include insights on regions less effectively hammer peened or, in contrast, overpeened.



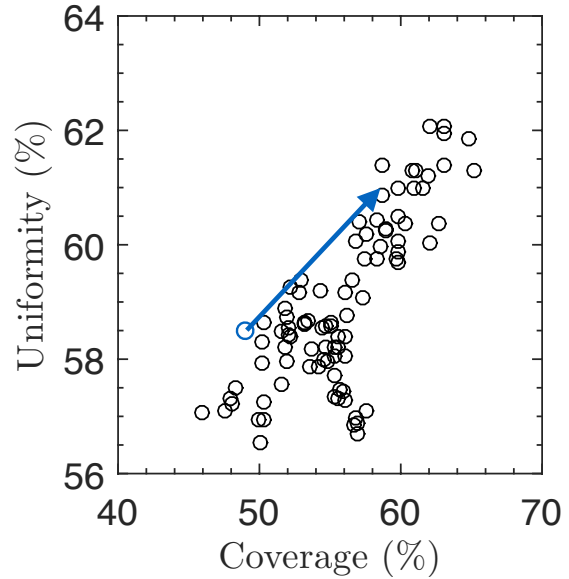
(a) Coverage  $c_t$  against normalized  $\bar{\sigma}_i^{compr}$ .



(b) Coverage  $c_t$  against normalized  $\Delta \bar{y}_i$ .



(c) Coverage  $c_t$  against normalized  $\Delta \bar{x}_i$ .



(d) Coverage  $c_t$  against uniformity  $u_t$ .

Figure 7.13 Coverage  $c_t$  and uniformity  $u_t$  relationship plots with normalized stress-based objective variables. The qualitative trends are indicated by the keyed arrows.

Additional experiments will have to be carried to confirm these observations, and whether or not those can be linked to an actual increase in fatigue life.

## **7.8 Acknowledgements**

The authors would like to thank the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC), Hydro-Québec, and Alstom for their financial support.



## CHAPITRE 8 THÉORIE THERMO-PLASTIQUE ET IMPLANTATION DANS ABAQUS

Au cours de cette thèse, nous avons implanté plusieurs modèles théoriques dans Abaqus à l’aide de sous-routines UEL. Le but de cette section est donc de proposer une méthodologie simple et détaillée afin de permettre le développement de théories thermodynamiquement admissibles, ainsi que leur implantation numérique dans le logiciel d’éléments finis ABAQUS. Cette méthodologie s’est avérée essentielle dans la publication des articles 1 et 2, dont une partie abrégée de cette méthodologie est publiée avec l’article 1, et dans toutes implantations futures du martelage combiné au soudage. De plus, une telle méthodologie est souvent difficile à obtenir à un seul endroit de manière concise. Il est à noter que cette méthodologie est aussi présentée pour des fins d’implantation dans le logiciel d’Hydro-Québec.

À titre d’exemple, nous développons une théorie thermo-élastique plastique linéaire — similaire à celle présentement implantée dans le logiciel maison de l’IREQ pour la simulation du soudage de l’acier A516 — où les parties mécanique et thermique sont complètement couplées, contrairement à celle présentement implantée à l’IREQ. La méthode est générale au sens qu’elle fournit les fondations nécessaires à la formulation d’une théorie plus complexe, e.g. la considération des transformations de phase durant le soudage d’un acier martensitique 13%Cr-4%Ni.

Le rapport est divisé comme suit : on présente tout d’abord aux sections 8.1-8.7 la formulation de la théorie, dans ce cas-ci une théorie thermo-mécaniquement couplée pour des petites déformations élastiques-plastiques (“rate-independent”). Par la suite, à la section 8.8, on présente le schéma d’intégration numérique nécessaire afin de résoudre les équations d’équilibre pour cette théorie. La formulation variationnelle pour des fins d’implantation dans un logiciel d’éléments finis est discutée à la section 8.9. Finalement, la tangente algorithmique nécessaire à la méthode de résolution de Newton-Raphson est donnée à la section à 8.10.

### 8.1 Cinématique

#### 8.1.1 Notions de base

Considérons un point de l’espace  $\mathbf{x}$  d’un corps macroscopique homogène  $B$ . Un mouvement de  $B$  est décrite par une fonction de mappage unique  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}, t)$ . On décrit un déplacement

$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  et un gradient de déformation  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  tel que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{x}, \quad \text{et} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \nabla \boldsymbol{\chi}. \quad (8.1)$$

On définit le gradient de déplacement  $\mathbf{H}$  tel que

$$\mathbf{H} = \nabla \mathbf{u} = \nabla \boldsymbol{\chi} - \mathbf{1} = \mathbf{F} - \mathbf{1}, \quad (8.2)$$

Considérons le tenseur de déformation de Green St-Venant  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}), \quad \text{avec} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \mathbf{F}, \quad (8.3)$$

où  $\mathbf{C}$  est le tenseur droit de Cauchy-Green. En substituant (8.2) dans (8.3), on obtient

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^\top + \mathbf{H}^\top \mathbf{H}). \quad (8.4)$$

La théorie des petites déformations, repose sur l'hypothèse où on considère la limite lorsque  $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{0}$ . En particulier, le tenseur de déformation  $\mathbf{E}$  est approximé par

$$\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top). \quad (8.5)$$

Conséquemment, on définit les identités suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \text{sym } \mathbf{H} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top), \\ \mathbf{W} &= \text{skw } \mathbf{H} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^\top), \end{aligned} \quad (8.6)$$

où  $\mathbf{W}$  est le tenseur de rotation antisymétrique.

## 8.2 Équilibre des forces et des moments

Dans ce rapport, on dénote  $P$ , une sous-région arbitraire du corps  $B$  avec comme vecteur normal unitaire  $\mathbf{n}$ , pointant vers l'extérieur de la surface  $P$ , dénotée  $\partial P$ .

Puisque la problématique de soudage implique généralement de grandes pièces fixées, on néglige ici les effets inertiels. De plus, on omet les forces volumétriques externes pour le moment. Conséquemment, la considération de l'équilibre des forces et des moments nous amènent aux conclusions suivantes :

- (a) Il existe un tenseur de contrainte  $\mathbf{T}$ , appelé la contrainte de Cauchy, tel que la traction

sur un élément de surface  $\partial P$  de  $P$  est donnée par

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}\mathbf{n}. \quad (8.7)$$

(b)  $\mathbf{T}$  satisfait l'équilibre des forces

$$\text{Div } \mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad (8.8)$$

(c)  $\mathbf{T}$  obéit la contrainte de symétrie

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^\top, \quad (8.9)$$

représentant l'équilibre des moments.

### 8.3 Équilibre d'énergie et d'entropie

Cette discussion de la thermodynamique implique les quantités suivantes :

- $\varepsilon_R$  l'énergie interne par unité de volume,
- $\eta_R$  la densité d'entropie par unité de volume,
- $\mathbf{q}_R$  le flux de chaleur par unité de surface,
- $q_R$  la source de chaleur externe par unité de volume,
- $\vartheta$  la température absolue ( $\vartheta > 0$ ),

Supposons une région du matériau  $P$ . Donc, en accord avec l'omission des effets inertiels, nous négligeons l'énergie cinétique, ce qui nous amène à l'équilibre d'énergie suivante :

$$\overline{\int_P \dot{\varepsilon} dv} = \int_{\partial P} (\mathbf{T}\mathbf{n}) \cdot \dot{\mathbf{u}} da - \int_{\partial P} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da + \int_P q dv \quad (8.10)$$

Appliquant le théorème de la divergence sur les termes de (8.10) impliquant des intégrales de surface, on obtient

$$\int_P \left( \dot{\varepsilon} - (\text{Div } \mathbf{T}) \cdot \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} + \text{Div } \mathbf{q} - q \right) dv = 0. \quad (8.11)$$

Utilisant l'équation d'équilibre (8.8), et le fait que (8.11) doit être satisfaite pour toutes sous-régions  $P$ , nous obtenons la forme locale suivante pour l'équilibre d'énergie

$$\dot{\varepsilon} = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} - \text{Div } \mathbf{q} + q. \quad (8.12)$$

De plus, la seconde loi de la thermodynamique prend la forme d'une équilibre d'entropie,

$$\overline{\int_{\mathbf{P}} \dot{\eta} dv} \geq - \int_{\partial \mathbf{P}} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{\vartheta} da + \int_{\mathbf{P}} \frac{q}{\vartheta} dv, \quad (8.13)$$

d'où la forme locale

$$\dot{\eta} \geq -\text{Div} \left( \frac{\mathbf{q}}{\vartheta} \right) + \frac{q}{\vartheta}. \quad (8.14)$$

En substituant (8.14) dans (8.12), on obtient

$$\begin{aligned} -\text{Div} \left( \frac{\mathbf{q}}{\vartheta} \right) + \frac{q}{\vartheta} &= \frac{1}{\vartheta} (-\text{Div} \mathbf{q} + q) + \frac{1}{\vartheta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla \vartheta, \\ &= \frac{1}{\vartheta} \left( \dot{\varepsilon} - \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} + \frac{1}{\vartheta} \mathbf{q} \cdot \nabla \vartheta \right), \end{aligned} \quad (8.15)$$

d'où

$$(\dot{\varepsilon} - \vartheta \dot{\eta}) - \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} + \frac{1}{\vartheta} \mathbf{q} \cdot \nabla \vartheta \leq 0. \quad (8.16)$$

Introduisons l'énergie libre de Helmholtz

$$\psi = \varepsilon - \vartheta \eta. \quad (8.17)$$

(8.16), avec (8.17) nous amènent à l'inégalité d'énergie libre sous forme locale

$$\dot{\psi} + \eta \dot{\vartheta} - \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} + \frac{1}{\vartheta} \mathbf{q} \cdot \nabla \vartheta \leq 0. \quad (8.18)$$

#### 8.4 Décomposition élastique/plastique

Tout d'abord, dans le cadre des petites déformations, il est commun de supposer l'additivité du gradient de déplacement  $\mathbf{H}$ ,

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^e + \mathbf{H}^p, \quad (8.19)$$

où  $\mathbf{H}^e$  et  $\mathbf{H}^p$  sont les gradients de déformation élastique et plastique, respectivement. Similairement à (8.6), on obtient de manière équivalente

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p, \\ \dot{\mathbf{E}} &= \dot{\mathbf{E}}^e + \dot{\mathbf{E}}^p, \\ \mathbf{W} &= \mathbf{W}^e + \mathbf{W}^p. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Limitant notre discussion aux matériaux isotropes, et basés sur des travaux antérieurs concernant la plasticité, il est raisonnable d'assumer l'irrotationalité et l'incompressibilité de la

déformation plastique, c'est-à-dire

$$\mathbf{W}^p = \mathbf{0}, \quad \text{et} \quad \text{tr } \mathbf{E}^p = 0. \quad (8.21)$$

Substituant (8.20)-(8.21) dans (8.18), on obtient

$$\dot{\psi} + \eta \dot{\vartheta} - \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}^e - \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}^p + \frac{1}{\vartheta} \mathbf{q} \cdot \nabla \vartheta \leq 0. \quad (8.22)$$

## 8.5 Théorie constitutive

### 8.5.1 Hypothèses constitutives

Guidés par l'équation d'énergie libre (8.22), il est assumé que l'énergie libre  $\psi_{mat}$ , la contrainte  $\mathbf{T}$  et l'entropie  $\eta$  sont données par

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \hat{\psi}_{\mathbf{R}}(\mathbf{E}^e, \vartheta) \\ \mathbf{T} &= \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{E}^e, \vartheta) \\ \eta &= \hat{\eta}(\mathbf{E}^e, \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (8.23)$$

### 8.5.2 Restrictions thermodynamiques

En substituant (8.23) dans (8.22),

$$\left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{E}^e} - \mathbf{T} \right) : \dot{\mathbf{E}}^e + \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \vartheta} + \eta \right) : \dot{\vartheta} - \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}^p + \frac{1}{\vartheta} \hat{\mathbf{q}} \cdot \nabla \vartheta \leq 0. \quad (8.24)$$

Cette inégalité doit être respectée pour toutes valeurs de  $\mathbf{E}^e$ ,  $\vartheta$  et  $\nabla \vartheta$ . En suivant la procédure de Coleman-Noll, on conclut que l'énergie libre détermine directement la contrainte  $\mathbf{T}^e$  et l'entropie  $\eta$ , à travers les relations d'états suivantes

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{\partial \hat{\psi}(\mathbf{E}^e, \vartheta)}{\partial \mathbf{E}^e}, \\ \eta &= -\frac{\partial \hat{\psi}(\mathbf{E}^e, \vartheta)}{\partial \vartheta}, \end{aligned} \right\} \quad (8.25)$$

Similairement à (8.25), l'équation de dissipation est simplement

$$\mathcal{D} = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}^p - \frac{1}{\vartheta} \hat{\mathbf{q}} \cdot \nabla \vartheta \geq 0 \quad (8.26)$$

### 8.5.3 Écoulement plastique

Maintenant, guidé par la littérature sur les théories de plasticité, nous faisons les hypothèses suivantes :

(i) Nous introduisons

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2/3} |\dot{\mathbf{E}}^p|, \quad (8.27)$$

le taux de déformation plastique équivalent en tension. Comme d'habitude, la déformation plastique équivalente de tension est donc

$$\bar{\epsilon}^p \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \dot{\bar{\epsilon}}^p(\mathbf{X}, \zeta) d\zeta, \quad \text{sujet à la condition initiale } \bar{\epsilon}^p(\mathbf{X}, 0) = 0. \quad (8.28)$$

(ii) Nous supposons que la direction de l'écoulement plastique coïncide avec la direction du tenseur déviatorique de contrainte de Cauchy. En d'autres mots, le déviateur  $\mathbf{T}_0$  est codirectionnel avec  $\dot{\mathbf{E}}^p$  et la direction de l'écoulement plastique est

$$\mathbf{N}^p = \frac{\dot{\mathbf{E}}^p}{|\dot{\mathbf{E}}^p|} = \frac{\mathbf{T}_0^e}{|\mathbf{T}_0^e|}. \quad (8.29)$$

On définit par la suite une contrainte équivalente de tension par

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3/2} |\mathbf{T}_0|. \quad (8.30)$$

Substituant l'équation (8.29), (8.30) dans (8.27), l'expression pour le taux de déformation plastique  $\dot{\mathbf{E}}^p$  est

$$\mathbf{E}^p = \dot{\bar{\epsilon}}^p \left( \frac{3\mathbf{T}_0}{2\bar{\sigma}} \right) \quad (8.31)$$

(iii) Afin de limiter les contraintes déviatoriques admissibles  $\mathbf{T}_0$ , nous introduisons l'équation d'écoulement suivante

$$f \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\sigma} - Y \leq 0, \quad (8.32)$$

où  $Y$  est la résistance à l'écoulement plastique du matériau tel que

$$Y(\bar{\epsilon}^p, \vartheta) > 0 \quad \text{avec} \quad Y(0, \vartheta) = Y_0. \quad (8.33)$$

La valeur de  $Y$  à  $\bar{\epsilon}^p = 0$  est communément appelée la contrainte d'écoulement. De plus, pour une théorie "rate-independent", il est de nature d'introduire les conditions de Kuhn-Tucker

$$f \leq 0, \quad \dot{\bar{\epsilon}}^p \geq 0, \quad f \dot{\bar{\epsilon}}^p = 0, \quad (8.34)$$

ainsi que les conditions de complémentarités

$$f\dot{\bar{e}}^p = 0 \quad \text{lorsque} \quad f = 0 \quad (8.35)$$

#### 8.5.4 Équations dissipatives

À partir de l'équation (8.26), nous considérons une fonction de type Fourier pour  $\hat{\mathbf{q}}$

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K}(\mathbf{E}^e, \vartheta) \nabla \vartheta, \quad (8.36)$$

où  $\mathbf{K}$  est le tenseur de conductivité.

Utilisant (8.31) et (8.36), l'équation de dissipation peut être écrite tel que

$$\mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}^p + \frac{1}{\vartheta} \nabla \vartheta \cdot \mathbf{K} \nabla \vartheta \geq 0. \quad (8.37)$$

On assume un matériau strictement dissipatif, ce qui nous amène aux équations suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}^p &> 0 \quad \text{pour} \quad \dot{\mathbf{E}}^p > 0, \\ \nabla \vartheta \cdot \mathbf{K} \nabla \vartheta &> 0 \quad \text{pour} \quad \nabla \vartheta \neq 0, \end{aligned} \quad (8.38)$$

#### 8.5.5 Conséquences additionnelles de la thermodynamique

Les équations (8.25)<sub>1</sub> et (8.23), nous permettent d'écrire la première relation de Gibbs

$$\dot{\psi} = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}^e - \eta \dot{\vartheta}, \quad (8.39)$$

qui devient, en substituant (8.17), la seconde équation de Gibbs

$$\dot{\varepsilon} = \vartheta \dot{\eta} + \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}^e. \quad (8.40)$$

Combinant l'équilibre d'énergie (8.12), (8.39) et (8.40), on arrive l'équation d'entropie

$$\vartheta \dot{\eta} = -\text{Div} \mathbf{q} + q + \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}^p. \quad (8.41)$$

Cette équation est complètement équivalente à notre équilibre d'énergie (8.12) et nous permettra d'obtenir l'équation différentielle partielle pour la chaleur.

Par la suite, on définit la chaleur spécifique par

$$c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vartheta}. \quad (8.42)$$

Donc, à partir de (8.17) et (8.23), nous obtenons

$$c = \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \vartheta} + \eta + \vartheta \frac{\partial \eta}{\partial \vartheta} \right), \quad (8.43)$$

ce qui nous amène à la définition importante suivante

$$c = -\vartheta \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \vartheta^2}. \quad (8.44)$$

Avec (8.23) et (8.44), on obtient

$$\begin{aligned} \vartheta \dot{\eta} &= -\vartheta \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \mathbf{E}^e \partial \vartheta} : \dot{\mathbf{E}}^e + c \dot{\vartheta}, \\ &= -\vartheta \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \vartheta} : \dot{\mathbf{E}}^e + c \dot{\vartheta}. \end{aligned} \quad (8.45)$$

Substituant (8.45) dans (8.41) nous permet d'obtenir l'équation différentielle partielle pour la température,

$$c \dot{\vartheta} = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}^p - \text{Div} \mathbf{q} + q + \vartheta \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \vartheta} : \dot{\mathbf{E}}^e, \quad (8.46)$$

où on définit  $\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \vartheta}$  comme étant le module de rigidité contrainte-température bien connue en thermo-élasticité.

### 8.5.6 Isotropie

Comme préalablement mentionné, notre discussion se limite aux matériaux isotropes et donc sans orientations cristallographiques particulières. On choisit donc la représentation suivante pour le tenseur de conductivité

$$\mathbf{K}(\mathbf{E}^e, \vartheta) = \kappa(\mathcal{I}_{\mathbf{E}^e}, \vartheta) \mathbf{1}, \quad \text{avec} \quad \kappa(\mathcal{I}_{\mathbf{E}^e}, \vartheta) > 0, \quad (8.47)$$

où  $\kappa(\mathcal{I}_{\mathbf{E}^e}, \vartheta)$  est une conductivité scalaire et

$$\mathcal{I}_{\mathbf{E}^e} = (I_1(\mathbf{E}^e), I_2(\mathbf{E}^e), I_3(\mathbf{E}^e)), \quad (8.48)$$



est la liste des invariants principaux de  $\mathbf{E}^e$ .

Dans ce cas, le flux de chaleur (8.36) devient

$$\mathbf{q} = -\kappa(\mathcal{I}_{\mathbf{E}^e}, \vartheta) \nabla \vartheta. \quad (8.49)$$

## 8.6 Sommaire

Dans cette section, le sommaire de la théorie vue jusqu'ici est présenté

$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t),$	mouvement ;
$\mathbf{F} = \nabla \chi,$	gradient de déformation ;
$\mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{1},$	gradient de déplacement ;
$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + (\mathbf{H})^\top),$	déformation ;
$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p,$	décomposition de la déformation ;
$\mathbf{E}^e,$	déformation élastique ;
$\mathbf{E}^p,$	déformation plastique ;
$\mathbf{T} = \mathbf{T}^\top,$	contrainte de Cauchy ;
$\psi,$	énergie libre par unité de volume ;
$\eta,$	densité d'entropie par unité de volume ;
$\vartheta > 0,$	température absolue ;
$\nabla \vartheta > 0,$	gradient de température ;
$\mathbf{q},$	flux de chaleur par unité de surface.

### 8.6.1 Équations constitutives

#### 1. Énergie libre

$$\psi = \tilde{\psi}(\mathcal{I}_{\mathbf{E}^e}, \vartheta), \quad (8.50)$$

où  $\mathcal{I}_{\mathbf{E}^e}$  représente la liste des invariants principaux de  $\mathbf{E}^e$ .

#### 2. Contrainte de Cauchy

La contrainte de Cauchy est donnée par

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \psi(\mathcal{I}_{\mathbf{E}^e}, \vartheta)}{\partial \mathbf{E}^e}. \quad (8.51)$$

On définit la quantité

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3/2} |\mathbf{T}_0|, \quad (8.52)$$

comme étant la contrainte équivalente de tension.

### 3. Évolution de $\mathbf{E}^p$

L'équation évolutive pour la déformation plastique  $\mathbf{E}^p$  est

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\epsilon}^p \left( \frac{3\mathbf{T}_0}{2\bar{\sigma}} \right), \quad (8.53)$$

où

$$\dot{\epsilon}^p = \sqrt{2/3} |\dot{\mathbf{E}}_0^p|, \quad (8.54)$$

est le taux de déformation plastique équivalent de tension.

### 4. Fonction d'écoulement, Kuhn-Tucker et conditions de complémentarités

On introduit une fonction d'écoulement

$$f \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\sigma} - Y(\bar{\epsilon}^p, \vartheta) \leq 0, \quad (8.55)$$

avec  $Y$  la résistance à l'écoulement du matériau, ainsi que les conditions de Kuhn-Tucker

$$\dot{\epsilon}^p \geq 0, \quad f \leq 0, \quad f \dot{\epsilon}^p = 0, \quad (8.56)$$

et les conditions de complémentarités

$$\dot{\epsilon}^p \dot{f} = 0, \quad \text{lorsque } f = 0. \quad (8.57)$$

### 5. Entropie

La dérivée partielle de l'énergie libre par rapport à la température

$$\eta = - \frac{\partial \tilde{\psi}(\mathcal{I}_{\mathbf{E}^e}, \vartheta)}{\partial \vartheta} \quad (8.58)$$

représente l'entropie.

### 6. Loi de Fourier

Le flux de chaleur  $\mathbf{q}$  est supposé suivre une loi de Fourier

$$\mathbf{q} = -\kappa(\mathcal{I}_{\mathbf{E}^e}, \vartheta) \nabla \vartheta \quad (8.59)$$

avec  $\kappa(\mathcal{I}_{\mathbf{E}^e}, \vartheta) > 0$ , une conductivité scalaire.

## 7. Équations différentielles partielles gouvernantes

Les équations différentielles partielles gouvernantes sont

### 1. L'équilibre de forces

$$\text{Div } \mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad (8.60)$$

avec  $\mathbf{T}$  donnée par (8.51).

### 2. L'équation (8.46), avec (8.59) donne

$$c\dot{\vartheta} = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}^p + \text{Div}(\kappa \nabla \vartheta) + q + \frac{1}{2} \vartheta \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \vartheta} : \dot{\mathbf{E}}^e, \quad (8.61)$$

où

$$c = -\vartheta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2}, \quad (8.62)$$

est la chaleur spécifique.

Nous avons aussi besoin de conditions initiales afin de compléter la théorie. Dénotons par  $\mathcal{S}_{\mathbf{u}}$  et  $\mathcal{S}_{\mathbf{t}}$  les sous-régions complémentaires de la surface  $\partial B$  du corps  $B$  avec  $\partial B = \mathcal{S}_{\mathbf{u}} \cup \mathcal{S}_{\mathbf{t}}$  et  $\mathcal{S}_{\mathbf{u}} \cap \mathcal{S}_{\mathbf{t}} = \emptyset$ . De manière similaire, dénotons  $\mathcal{S}_{\vartheta}$  et  $\mathcal{S}_{\mathbf{q}}$  les sous-régions complémentaires de la surface telles que  $\partial B = \mathcal{S}_{\vartheta} \cup \mathcal{S}_{\mathbf{q}}$  et  $\mathcal{S}_{\vartheta} \cap \mathcal{S}_{\mathbf{q}} = \emptyset$ . Puis, pour un intervalle de temps  $t \in [0, T]$ , on considère une paire de conditions aux frontières où les déplacements sont prescrits sur  $\mathcal{S}_{\mathbf{u}}$  et où les tractions sont prescrites sur  $\mathcal{S}_{\mathbf{t}}$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \check{\mathbf{u}} \quad \text{sur} \quad \mathcal{S}_{\mathbf{u}} \times (0, T), \\ \mathbf{T}\mathbf{n} &= \check{\mathbf{t}} \quad \text{sur} \quad \mathcal{S}_{\mathbf{t}} \times (0, T), \end{aligned} \right\} \quad (8.63)$$

ainsi qu'une autre paire de conditions frontière pour la température et le flux de chaleur sur  $\mathcal{S}_{\vartheta}$  et  $\mathcal{S}_{\mathbf{q}}$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \check{\vartheta} \quad \text{sur} \quad \mathcal{S}_{\vartheta} \times (0, T), \\ -\kappa \nabla \vartheta \cdot \mathbf{n} &= \check{q} \quad \text{sur} \quad \mathcal{S}_{\mathbf{q}} \times (0, T), \end{aligned} \right\} \quad (8.64)$$

avec  $\check{\mathbf{u}}, \check{\mathbf{t}}, \check{\vartheta}$  et  $\check{q}$  des fonctions de  $\mathbf{x}$  et  $t$ , ainsi que les valeurs initiales

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \vartheta(\mathbf{x}, 0) = \vartheta_0(\mathbf{x}) \quad \text{dans } B. \quad (8.65)$$

Le système d'équations couplé (8.60) et (8.61), avec (8.63), (8.64) et (8.65) résulte en un problème de valeur initiale pour le déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  et la température  $\vartheta(\mathbf{x}, t)$ .

## 8.7 Spécialisation

La théorie présentée jusqu'ici est générale pour les matériaux isotropes. On procède maintenant à sa spécialisation.

### 8.7.1 Énergie libre

On considère l'énergie libre thermo-élastique suivante

$$\psi_R = G|\mathbf{E}^e|^2 + \frac{1}{2}(K - \frac{2}{3}G)(\text{tr } \mathbf{E}^e)^2 - (\vartheta - \vartheta_0)\mathbf{M} : \mathbf{E}^e, \quad (8.66)$$

où le module de rigidité température-contrainte  $\mathbf{M}$  est défini par

$$\mathbf{M} = \beta \mathbf{1}, \quad \text{avec} \quad \beta = -3K\alpha, \quad (8.67)$$

avec  $\alpha$ , le coefficient d'expansion thermique. Finalement, en utilisant (8.51) et (8.66) la contrainte de Cauchy et l'entropie sont données par

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= 2G\mathbf{E}_0^e + K(\text{tr } \mathbf{E}^e)\mathbf{1} - 3K\alpha(\vartheta - \vartheta_0)\mathbf{1}, \\ \eta &= \frac{\partial G}{\partial \vartheta}|\mathbf{E}^e|^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial K}{\partial \vartheta}(\text{tr } \mathbf{E}^e)^2 - 3K\alpha \text{tr } \mathbf{E}^e - 3(\vartheta - \vartheta_0) \left( \frac{\partial K}{\partial \vartheta}\alpha + K\frac{\partial \alpha}{\partial \vartheta} \right) (\text{tr } \mathbf{E}^e), \end{aligned} \quad (8.68)$$

## 8.8 Intégration numérique

Dans cette section, l'algorithme d'intégration est présenté afin de permettre la résolution numérique de la théorie décrite plus tôt. Soit l'intervalle de temps  $[0, t_{max}]$ . On assume qu'à un temps  $t_n \in [0, t_{max}]$ , nous avons

$$\{\mathbf{T}_n, \mathbf{E}_n^p, \dot{\mathbf{E}}_n^p, \mathbf{E}_n, \vartheta_n\} \quad \text{ainsi que} \quad \Delta \mathbf{E}, \Delta \vartheta \quad \text{et} \quad \Delta t = t_{n+1} - t_n, \quad (8.69)$$

où  $\Delta \mathbf{E}$  et  $\Delta \vartheta$  représentent l'incrément de déformation et de température occurring durant l'intervalle de temps  $\Delta t$ . L'objectif de ce schéma d'intégration est d'obtenir

$$\{\mathbf{T}_{n+1}, \mathbf{E}_{n+1}^p, \dot{\mathbf{E}}_{n+1}^p\}, \quad \text{au temps} \quad t_{n+1} = t_n + \Delta t. \quad (8.70)$$

Commençons par écrire la loi d'écoulement (8.53) sous une forme générique

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \sqrt{3/2} \dot{\epsilon}^p \mathbf{N}^p, \quad \mathbf{N}^p = \sqrt{3/2} \frac{\mathbf{T}_0}{\bar{\sigma}}. \quad (8.71)$$

Intégrant cette équation temporelle en utilisant un schéma d'Euler implicite nous donne

$$\mathbf{E}_{n+1}^p = \mathbf{E}_n^p + \sqrt{3/2} \Delta \bar{\epsilon}^p \mathbf{N}_{n+1}^p. \quad (8.72)$$

Rappelons l'équation constitutive pour la contrainte de Cauchy (8.51)

$$\mathbf{T} = \mathbb{C} [\mathbf{E} - \mathbf{E}^p] + \Lambda \mathbf{1}, \quad \mathbb{C} = 2G\mathbb{I} + (K - (2/3)G)\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad \Lambda = -3K\alpha(\vartheta - \vartheta_0). \quad (8.73)$$

Sous forme incrémentale, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{n+1} &= \mathbb{C} [\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_{n+1}^p] + \Lambda_{n+1} \mathbf{1}, \\ &= \mathbb{C} [\mathbf{E}_n - \mathbf{E}_n^p + \Delta \mathbf{E}_n] - \mathbb{C} \Delta \mathbf{E}_{n+1}^p + \Lambda_{n+1} \mathbf{1}, \\ &= \mathbb{C} \mathbf{E}_{\text{trial}}^e - \sqrt{6} G \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p \mathbf{N}_{n+1}^p + \Lambda_{n+1} \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (8.74)$$

où nous avons utilisé le fait que  $\mathbf{N}^p$  est déviatorique et où

$$\mathbf{E}_{\text{trial}}^e = \mathbf{E}_n - \mathbf{E}_n^p + \Delta \mathbf{E}_n. \quad (8.75)$$

D'un point de vue physique, l'équation (8.75) implique que l'on gèle initialement l'écoulement plastique. On fera une correction plastique par la suite. Définissons aussi

$$\mathbf{T}_{\text{trial}} = \mathbb{C} \mathbf{E}_{\text{trial}}^e, \quad (8.76)$$

tel que

$$\mathbf{T}_{n+1} = \mathbf{T}_{\text{trial}} - \sqrt{6} G \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p \mathbf{N}_{n+1}^p + \Lambda_{n+1} \mathbf{1}. \quad (8.77)$$

Rappelons que la contrainte équivalente de tension (8.52) est donnée par

$$\bar{\sigma}_{n+1} = \sqrt{3/2} |(\mathbf{T}_{n+1})_0|, \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}_{\text{trial}} = \sqrt{3/2} |(\mathbf{T}_{\text{trial}})_0|. \quad (8.78)$$

On définit aussi une fonction d'écoulement "test" afin de vérifier s'il y a écoulement durant cet incrément,

$$f_{\text{trial}} = \bar{\sigma}_{\text{trial}} - Y(\bar{\epsilon}_n^p, \vartheta_n). \quad (8.79)$$

Or, dans cette intégration numérique, le chargement/déchargement est décidé en fonction des conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{si } f_{\text{trial}} \leq 0 & \text{ alors l'incrément est élastique, et } \Delta\bar{\epsilon}^p = 0, \\ \text{si } f_{\text{trial}} > 0 & \text{ alors l'incrément est plastique, et } \Delta\bar{\epsilon}^p > 0. \end{aligned} \quad (8.80)$$

Supposons maintenant que nous sommes en présence d'un incrément plastique. La partie déviatorique de la contrainte incrémentale (8.77) est

$$(\mathbf{T}_{n+1})_0 = (\mathbf{T}_{\text{trial}})_0 - \sqrt{6}G\Delta\bar{\epsilon}^p_{n+1}\mathbf{N}_{n+1}^p, \quad (8.81)$$

qui, en substituant (8.72)<sub>2</sub> pour la direction plastique d'écoulement, à savoir

$$\mathbf{N}_{n+1}^p = \sqrt{3/2} \frac{(\mathbf{T}_0)_{n+1}}{\bar{\sigma}_{n+1}}, \quad \text{et} \quad \mathbf{N}_{\text{trial}}^p = \sqrt{3/2} \frac{(\mathbf{T}_0)_{\text{trial}}}{\bar{\sigma}_{\text{trial}}}, \quad (8.82)$$

peut-être réécrite sous la forme suivante

$$\left( \sqrt{2/3} \bar{\sigma}_{n+1} + \sqrt{6}G\Delta\bar{\epsilon}^p \right) \mathbf{N}_{n+1}^p = \sqrt{2/3} \bar{\sigma}_{\text{trial}} \mathbf{N}_{\text{trial}}^p, \quad (8.83)$$

ce qui donne immédiatement deux conclusions importantes :

- (1) La direction d'écoulement plastique à la fin de l'incrément est déterminée par la direction d'écoulement plastique d'essai :

$$\mathbf{N}_{n+1}^p = \mathbf{N}_{\text{trial}}^p \quad (8.84)$$

- (2) Conséquemment, la contrainte équivalente de tension à la fin de l'incrément ainsi que celle d'essai sont reliées par

$$\bar{\sigma}_{n+1} = \bar{\sigma}_{\text{trial}} - 3G\Delta\bar{\epsilon}^p \quad (8.85)$$

Par la suite, la condition de complémentarité (8.57), ( $f = 0$ ), requiert donc que

$$\bar{\sigma}_{n+1} = Y(\bar{\epsilon}_{n+1}^p, \vartheta_{n+1}). \quad (8.86)$$

En substituant cette dernière relation dans (8.85), on obtient une équation implicite pour l'incrément de déformation plastique équivalente de tension  $\Delta\bar{\epsilon}^p$ ,

$$\bar{\sigma}_{\text{trial}} - 3G\Delta\bar{\epsilon}^p - Y(\bar{\epsilon}_{n+1}^p, \vartheta_{n+1}) = 0. \quad (8.87)$$

Une fois l'équation résolue, on peut dès lors déterminer les quantités  $\{\mathbf{T}_{n+1}, \mathbf{E}_{n+1}^p, \dot{\bar{\epsilon}}_{n+1}^p\}$ .

En somme, l'algorithme se résume de la manière suivante. Étant donné

$$\{\mathbf{T}_n, \mathbf{E}_n^p, \bar{\epsilon}_n^p, \mathbf{E}_n, \vartheta_n\} \quad \text{ainsi que} \quad \Delta \mathbf{E}, \Delta \vartheta \quad \text{et} \quad \Delta t = t_{n+1} - t_n, \quad (8.88)$$

**Étape 1. Calculer :**

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\text{trial}} &= \mathbb{C} \mathbf{E}_{\text{trial}}^e, \quad \mathbf{E}_{\text{trial}}^e = \mathbf{E}_n - \mathbf{E}_n^p + \Delta \mathbf{E} \\ \bar{\sigma}_{\text{trial}} &= \sqrt{3/2} |(\mathbf{T}_{\text{trial}})_0| \\ \mathbf{N}_{\text{trial}}^p &= \sqrt{3/2} \frac{(\mathbf{T}_{\text{trial}})_0}{\bar{\sigma}_{\text{trial}}} \\ f_{\text{trial}} &= \bar{\sigma}_{\text{trial}} - Y(\bar{\epsilon}_n^p). \end{aligned} \quad (8.89)$$

**Étape 2.**

**SI** ( $f_{\text{trial}} \leq 0$ ) **ALORS**

L'incrément est élastique et  $\Delta \bar{\epsilon}^p = 0$ .

Mise à jour :

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{n+1}^p &= \bar{\epsilon}_n^p \\ \mathbf{E}_{n+1}^p &= \mathbf{E}_n^p \\ \mathbf{T}_{n+1} &= \mathbf{T}_{\text{trial}} + \Lambda_{n+1}. \end{aligned} \quad (8.90)$$

**SINON** ( $f_{\text{trial}} > 0$ )

L'incrément est plastique.

Résoudre :

$$\Phi(\Delta \bar{\epsilon}^p) = \bar{\sigma}_{\text{trial}} - 3G\Delta \bar{\epsilon}^p - Y(\bar{\epsilon}_{n+1}^p, \vartheta_{n+1}) = 0, \quad (8.91)$$

pour  $\Delta \bar{\epsilon}^p$ .

Mise à jour :

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{n+1}^p &= \bar{\epsilon}_n^p + \Delta \bar{\epsilon}^p \\ \mathbf{E}_{n+1}^p &= \mathbf{E}_n^p + \sqrt{3/2} \Delta \bar{\epsilon}^p \mathbf{N}_{\text{trial}}^p \\ \mathbf{T}_{n+1} &= \mathbb{C} [\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_{n+1}^p] + \Lambda_{n+1}. \end{aligned} \quad (8.92)$$

## 8.9 Formulation variationnelle

Dans cette section, nous présentons la méthodologie afin d'obtenir la forme faible des équations différentielles (8.60) et (8.61) qui doivent être satisfaites dans le corps pour des fins d'implémentation dans le logiciel d'éléments finis ABAQUS.

La forme forte de notre théorie peut-être résumée comme suit :

$$\left. \begin{array}{l} \text{équilibre de forces} \\ \text{équilibre d'énergie} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Div } \mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{0} & \text{dans } B, \\ \mathbf{u} = \check{\mathbf{u}} & \text{sur } \mathcal{S}_{\mathbf{u}}, \\ \mathbf{T}\mathbf{n} = \check{\mathbf{t}} & \text{sur } \mathcal{S}_{\mathbf{t}}, \\ c\dot{\vartheta} = -\text{Div } \mathbf{q} + \tilde{q} = 0, & \text{dans } B, \\ \vartheta = \check{\vartheta} & \text{sur } \mathcal{S}_{\vartheta}, \\ -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \check{q} & \text{sur } \mathcal{S}_{\mathbf{q}}, \end{array} \right\} \quad (8.93)$$

où

$$\tilde{q} = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}^p + q - 3K\alpha\vartheta \text{tr } \mathbf{E}^e. \quad (8.94)$$

Puis, avec  $\mathbf{w}$  et  $w_1$  décrivant des fonctions tests disparaissant sur  $\mathcal{S}_{\mathbf{u}}$  et  $\mathcal{S}_{\vartheta}$ , respectivement, les formes faibles correspondantes sont

$$\begin{aligned} \int_B (\mathbf{w} \cdot \text{Div } \mathbf{T}) \, dv &= 0, \\ \int_B \left( w_1 (c\dot{\vartheta} + \text{Div } \mathbf{q} - \tilde{q}) \right) \, dv &= 0. \end{aligned} \quad (8.95)$$

En utilisant l'identité  $\text{Div}(\alpha \mathbf{a}) = \nabla \alpha \cdot \mathbf{a} + \alpha \text{Div}(\mathbf{a})$ , théorème de la divergence, et les conditions aux frontières  $\mathcal{S}_{\mathbf{t}}$  et  $\mathcal{S}_{\mathbf{q}}$ , les formes faibles (8.95) peuvent être réécrites ainsi

$$\begin{aligned} \int_B (\nabla \mathbf{w} : \mathbf{T}) \, dv - \int_{\mathcal{S}_{\mathbf{t}}} \mathbf{w} \cdot \check{\mathbf{t}} \, da &= 0, \\ \int_B \left( w_1 c\dot{\vartheta} - \nabla w_1 \cdot \mathbf{q} - w_1 \tilde{q} \right) \, dv - \int_{\mathcal{S}_{\mathbf{q}}} w_1 \check{q} \, da &= 0. \end{aligned} \quad (8.96)$$

Le corps est approximé utilisant des éléments finis tel que,  $B = \cup \mathbf{B}^e$ , et la solution d'essai pour les déplacements et la température sont interpolées à l'intérieur des éléments par

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \sum_A \mathbf{u}^A N^A, \\ \vartheta &= \sum_A \vartheta^A N^A, \end{aligned} \quad (8.97)$$



avec l'index  $A = 1, 2, \dots, M$  dénotant les noeuds d'un élément,  $\vartheta^A$  dénotant la température aux noeuds et  $N^A$  les fonctions de forme. Suivant une approche standard de Galerkin où les fonctions d'essais sont interpolées par ces mêmes fonctions de forme, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \sum_A \mathbf{w}^A N^A, \\ w_1 &= \sum_A w_1^A N^A.\end{aligned}\tag{8.98}$$

Substituant (8.97) et (8.98) dans (8.96), on obtient les équations élémentaires suivantes

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{B}^e} \left( \mathbf{w}^A \cdot (\mathbf{T} \nabla N^A) \right) dv - \int_{S_{\mathbf{t}}^e} N^A \mathbf{w}^A \cdot \check{\mathbf{t}} da &= 0, \\ \int_{\mathbf{B}^e} w_1^A \left( N^A c \dot{\vartheta} - \nabla N^A \cdot \mathbf{q} - N^A \tilde{q} \right) dv - \int_{S_{\mathbf{q}}^e} w_1^A N^A \check{q} da &= 0.\end{aligned}\tag{8.99}$$

Le système d'équations (8.99) est par la suite résolu à l'aide d'une méthode de Newton. Donc, puisque  $\mathbf{w}$  et  $w_1$  sont des fonctions arbitraires, on définit les résidus élémentaires pour les déplacements et la température comme suit

$$\begin{aligned}R_{\mathbf{u}}^A &= \int_{\mathbf{B}^e} \left( \mathbf{T} \text{grad } N^A \right) dv - \int_{S_{\mathbf{t}}^e} N^A \check{\mathbf{t}} da = 0, \\ R_{\vartheta}^A &= \int_{\mathbf{B}^e} \left( N^A c \dot{\vartheta} - \nabla N^A \cdot \mathbf{q} - N^A \tilde{q} \right) dv + \int_{S_{\mathbf{q}}^e} N^A \check{q} da = 0.\end{aligned}\tag{8.100}$$

En sus des résidus élémentaires (8.100), il faut définir les tangentes suivantes nécessaires à l'algorithme de Newton

$$\left. \begin{aligned}K_{\mathbf{u}, \mathbf{u}}^{AB} &= -\frac{\partial R_{\mathbf{u}}^A}{\partial \mathbf{u}^B}, \\ K_{\mathbf{u}, \vartheta}^{AB} &= -\frac{\partial R_{\mathbf{u}}^A}{\partial \vartheta^B}, \\ K_{\vartheta, \vartheta}^{AB} &= -\frac{\partial R_{\vartheta}^A}{\partial \vartheta^B}, \\ K_{\vartheta, \mathbf{u}}^{AB} &= -\frac{\partial R_{\vartheta}^A}{\partial \mathbf{u}^B},\end{aligned} \right\}\tag{8.101}$$

Utilisant (8.100), les tangentes (8.101) peuvent être évaluées

$$\begin{aligned}
K_{u_i, u_j}^{AB} &= -2 \int_{\mathbf{B}^e} \left( \frac{\partial N^A}{\partial x_k} \frac{\partial T_{ik}}{\partial E_{jl}} \frac{\partial N^B}{\partial x_l} \right) dv + \int_{S_{\mathbf{t}}^e} N^A N^B \frac{\partial \check{t}_i}{\partial u_j} da, \\
K_{u_i, \vartheta}^{AB} &= 3 \int_{\mathbf{B}^e} \left( K \alpha \frac{\partial N^A}{\partial x_k} N^B \delta_{ik} \right) dv, \\
K_{\vartheta, \vartheta}^{AB} &= - \int_{\mathbf{B}^e} \left( c \frac{N^A N^B}{\Delta t} + K \frac{\partial N^A}{\partial x_i} \frac{\partial N^B}{\partial x_i} + 3K \alpha N^A N^B (\text{tr } \dot{\mathbf{E}}^p + \text{tr } \mathbf{E}^e) \right) dv \\
&\quad + \int_{S_{\mathbf{q}}^e} N^A N^B \frac{\partial \check{q}}{\partial \vartheta} da, \\
K_{\vartheta, u_i}^{AB} &= \int_{\mathbf{B}^e} N^A \left( 2 \frac{\partial T_{kl}}{\partial E_{in}} \frac{\partial N^B}{\partial x_n} \dot{E}_{kl}^p - 3K \alpha \vartheta \frac{\partial N^B}{\partial x_i} \right) dv + \int_{S_{\mathbf{q}}^e} N^A N^B \frac{\partial \check{q}}{\partial u_i} da.
\end{aligned} \tag{8.102}$$

Le terme  $\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{E}}$  dans (8.102)<sub>1</sub> est communément appelé la tangente algorithmique et sera présenté dans la prochaine section. Les détails des calculs afin d'obtenir les tangentes (8.102) sont donnés ci-dessous.

## 8.10 Tangente algorithmique

Comme mentionné à la section précédente, la tangente algorithmique doit être calculée dans le cadre d'une intégration temporelle. Dans cette dernière, on obtient, à la fin de chaque incrément, une fonction constitutive pour la contrainte de Cauchy  $\mathbf{T}_{n+1}$  de la forme

$$\mathbf{T}_{n+1} = \hat{\mathbf{T}}_{n+1}(\bar{\epsilon}^p_n, \mathbf{E}_{\text{trial}}^e, \vartheta_{n+1}). \tag{8.103}$$

Puisque  $\mathbf{E}_{\text{trial}}^e = \mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n^p$ , on a de manière équivalente,

$$\mathbf{T}_{n+1} = \hat{\mathbf{T}}_{n+1}(\bar{\epsilon}^p_n, \mathbf{E}_n^p, \mathbf{E}_{n+1}, \vartheta_{n+1}). \tag{8.104}$$

Durant un incrément de temps, les arguments  $(\bar{\epsilon}^p_n, \mathbf{E}_n^p)$  sont fixes et seulement  $\mathbf{E}_{n+1}$  change durant une étape de Newton-Raphson.<sup>1</sup> En vue de (8.102)<sub>3</sub>, la tangente algorithmique est donnée par

$$\mathbb{C}_{\text{alg}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \hat{\mathbf{T}}_{n+1}(\bar{\epsilon}^p_n, \mathbf{E}_n^p, \mathbf{E}_{n+1}, \vartheta_{n+1})}{\partial \mathbf{E}_{n+1}}, \tag{8.105}$$

---

1. Il faut faire la même procédure pour la partie thermique où seulement  $\vartheta_{n+1}$ . Toutefois, cette tangente est beaucoup plus facile à calculer. Voir (8.102)<sub>3</sub>.

ou, de manière équivalente,

$$\mathbb{C}_{\text{alg}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \hat{\mathbf{T}}_{n+1}(\bar{\epsilon}^p_n, \mathbf{E}_{\text{trial}}^e, \vartheta_{n+1})}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e}. \quad (8.106)$$

L'objectif est donc de calculer de manière analytique cette dernière quantité appelée la tangente algorithmique.

Rappelons (8.77),

$$\mathbf{T}_{n+1} = \mathbf{T}_{\text{trial}} - \sqrt{6}G\Delta\bar{\epsilon}^p\mathbf{N}_{n+1}^p + \Lambda_{n+1}\mathbf{1}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{T}_{\text{trial}} = \mathbb{C}\mathbf{E}_{\text{trial}}^e, \quad (8.107)$$

ainsi que sa partie déviatorique

$$(\mathbf{T}_{n+1})_0 = 2G(\mathbf{E}_{\text{trial}}^e)_0 - \sqrt{6}G\Delta\bar{\epsilon}^p\mathbf{N}_{n+1}^p, \quad (8.108)$$

et la direction d'écoulement plastique

$$\mathbf{N}_{n+1}^p = \mathbf{N}_{\text{trial}}^p = \sqrt{3/2} \frac{(\mathbf{T}_{\text{trial}})_0}{\bar{\sigma}_{\text{trial}}} = \sqrt{6} \frac{G(\mathbf{E}_{\text{trial}}^e)_0}{\bar{\sigma}_{\text{trial}}}. \quad (8.109)$$

En substituant (8.108) et (8.109) dans (8.107),

$$\mathbf{T}_{n+1} = \left( \mathbb{C} - \frac{6G^2\Delta\bar{\epsilon}^p}{\bar{\sigma}_{\text{trial}}} \mathbb{I}_0 \right) \mathbf{E}_{\text{trial}}^e + \Lambda_{n+1}\mathbf{1}, \quad (8.110)$$

où  $\mathbb{I}_0$  est le tenseur déviatorique identité du 4<sup>e</sup> ordre. Par la suite, nous avons directement

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e} = \mathbb{C} - \frac{6G^2\Delta\bar{\epsilon}^p}{\bar{\sigma}_{\text{trial}}} \mathbb{I}_0 - (\mathbf{E}_{\text{trial}}^e)_0 \otimes \frac{6G^2}{\bar{\sigma}_{\text{trial}}} \frac{\partial \Delta\bar{\epsilon}^p}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e} + \frac{6G^2}{\bar{\sigma}_{\text{trial}}^2} \Delta\bar{\epsilon}^p (\mathbf{E}_{\text{trial}}^e)_0 \otimes \frac{\partial \bar{\sigma}_{\text{trial}}}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e}. \quad (8.111)$$

À partir de la loi d'écoulement (8.85), on peut exprimer

$$\frac{\partial \Delta\bar{\epsilon}^p}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e} = \frac{\sqrt{6}G}{3G + H} \mathbf{N}_{n+1}^p, \quad (8.112)$$

où  $H = \frac{\partial Y(\bar{\epsilon}^p_n, \Delta\bar{\epsilon}^p, \vartheta_{n+1})}{\partial \Delta\bar{\epsilon}^p}$  est le taux d'écrouissement du matériau. De manière similaire, on obtient

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{\text{trial}}}{\partial \mathbf{E}_{\text{trial}}^e} = -\sqrt{6}G\mathbf{N}_{n+1}^p. \quad (8.113)$$

Finalement, l'équation (8.110) pour la tangente algorithmique, ou communément appelée le

Jacobien de la méthode de Newton-Raphson, devient

$$\mathbb{C}_{\text{alg}} = 2G \left( 1 - \frac{3G\Delta\bar{\epsilon}^p}{\bar{\sigma}_{\text{trial}}} \right) \mathbb{I}_0 + K\mathbb{I} + 6G^2 \left( \frac{\Delta\bar{\epsilon}^p}{\bar{\sigma}_{\text{trial}}} - \frac{1}{3G + H} \right) \mathbf{N}_{n+1}^p \otimes \mathbf{N}_{n+1}^p, \quad (8.114)$$

où nous avons utilisé le fait que

$$\frac{(\mathbf{E}_{\text{trial}}^e)_0}{\bar{\sigma}_{\text{trial}}} = \frac{1}{\sqrt{6}G} \mathbf{N}_{n+1}^p. \quad (8.115)$$

### 8.11 Description d'un élément

La description d'un élément 2D, linéaire, intégration réduite à quatre noeuds est présenté ici à titre d'exemple ; démontré à la Fig. 8.1. Les fonctions de formes dans le repère local  $\zeta_e, \eta_e$  sont

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \zeta_e)(1 - \eta_e), \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \zeta_e)(1 - \eta_e), \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \zeta_e)(1 + \eta_e), \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \zeta_e)(1 + \eta_e). \end{aligned} \quad (8.116)$$

Nous distinguons deux types d'éléments :

- (1) État plan de déformation ;
- (2) Axisymétrie.

Les détails pour ces deux cas sont donnés ci-bas.

#### 8.11.1 État plan de déformation

Prenons la direction 3 comme étant la direction hors plan. Alors, les restrictions sur le gradient de déformation  $\mathbf{F}$  sont :

$$F_{33} = 1, \quad F_{13} = F_{23} = F_{31} = F_{32} = 0. \quad (8.117)$$

### 8.11.2 Axisymétrie

Pour ce cas, prenons la direction radiale, axiale et circonférentielle comme étant la direction 1, direction 2 et direction 3, respectivement. Similairement,

$$F_{13} = F_{23} = F_{31} = F_{32} = 0, \quad (8.118)$$

et, dénotant les positions radiales référentielles et courantes par  $R$  et  $r$ , respectivement, pour  $F_{33}$  nous avons

$$F_{33} = \frac{r}{R}. \quad (8.119)$$

Ces positions radiales sont calculées de la manière suivante :

$$R = N_A X_1^A, \quad r = N_A x_1^A, \quad (8.120)$$

avec  $X_1^A$  et  $x_1^A$  les positions référentielles et courantes des noeuds  $A$  dans la direction 1 (radiale), respectivement.

De plus, on dénote la position direction 2 (axiale) référentielle et courante par  $Z$  et  $z$ , respectivement. Avec cette nomenclature, les intégrales de volume sont évaluées par

$$\int () dv_R = \int () 2\pi R dR dZ, \quad \int () dv = \int () 2\pi r dr dz. \quad (8.121)$$

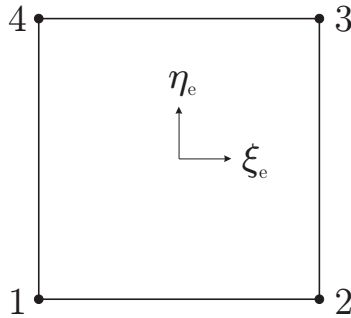


Figure 8.1 Schéma d'un élément linéaire avec repère naturel

### 8.12 Conclusion

Dans ce chapitre, une méthodologie étape par étape est présentée afin de :

- (1) Développer une théorie constitutive thermodynamique admissible pour le comportement d'un matériau.

- (2) Écrire la forme faible des équations différentielles partielles résultantes.
- (3) Obtenir les équations pour le résidu et la tangente numérique pour des fins d'implantation dans un logiciel par éléments finis. L'exemple particulier utilisé ici est une sous-routine UEL pour Abaqus.

Ce chapitre est d'importance dans cette thèse puisqu'il a permis de rédiger une partie importante des articles 1 et 2.

## CHAPITRE 9 DISCUSSION GÉNÉRALE

### 9.1 Limitations

Le développement des modèles constitutifs ainsi que le choix final repose sur certaines hypothèses, dont la plus importante est celle de l'omission des effets inertiels et vibratoires. Cette hypothèse est supportée par le fait que le martelage est généralement appliqué sur de grandes structures massives où les ondes élastiques n'affectent pas significativement le comportement macroscopique et où les déplacements transitoires de la structure dus aux vibrations sont négligeables. Cette hypothèse est aussi supportée dans la littérature pour la modélisation du martelage.

Concernant les propriétés mécaniques du matériau martelé, il est important de mentionner la qualité du matériau testé expérimentalement. Afin de produire des échantillons de 309L d'essais de traction uniaxiale, un bloc de E309L a été créé en déposant des cordons de soudure à l'image du processus de réparation actuel. Toutefois, nous avons noté la présence d'inclusions dans le bloc qui pourrait affecter les propriétés mécaniques. Il serait intéressant de vérifier si ces inclusions sont aussi présentes dans les cordons de soudure in-situ. De plus, concernant le modèle constitutif, il est connu que le modèle de Johnson-Cook s'écarte des résultats expérimentaux lorsque les déformations sont grandes. Toutefois, dans le cadre du martelage, les déformations observées sont entre 3 et 10%, ce qui est dans la plage de validité du modèle. Concernant la microstructure observée, une discussion éclairée sur la taille, la forme et la densité des cupules devrait être supportée par une minutieuse caractérisation quantitative sur une surface représentative couvrant plusieurs millimètres.

Concernant la procédure SAO pour l'optimisation des paramètres de martelage, nous avons dû simuler numériquement le martelage à l'aide des éléments finis. Toutefois, d'un point de vue pratique, la technologie actuelle disponible chez Hydro-Québec rend difficile le contrôle du martelage expérimental. Le procédé, notamment la trajectoire de martelage, dépend beaucoup de l'expérience du contrôleur et de la forme du cordon de soudure à marteler puisque la rigidité du montage permet des déplacements aléatoires du marteau. C'est d'ailleurs une des remarques de Curtat (2016) qui suggère d'usiner la surface soudée avant de la marteler afin d'avoir un meilleur contrôle de la trajectoire du robot. Notre modélisation numérique représente un martelage bien contrôlé et idéal. De plus, l'optimisation SAO fournit à l'utilisateur un ensemble de solutions Pareto en  $N$  dimensions. Le choix d'une solution demeure encore subjectif. Une procédure automatisée pour le choix de la solution est encore inexistante. Une limitation additionnelle provient du nombre d'évaluations initiales pour l'optimisation

multi-objectifs. Dans le cas d'un problème de boîte noire, comme tel est le cas ici, nous avons utilisé un nombre suggéré par Bonte et al. (2008). Toutefois, d'autres travaux (Gheribi et al., 2016) indiquent que ce nombre s'applique généralement que dans le cas d'un problème mono-objectif. Dans un cas à  $N$  objectifs, ce nombre d'évaluations devrait être aux alentours de  $1000 \times N$ . À défaut de faire cette vérification, et d'un point de vue mathématique, il est impossible de prouver que les résultats de cette optimisation sont supérieures à une recherche aléatoire. Une alternative qui pourrait nous permettre d'éviter d'effectuer ce nombre d'évaluations serait de transformer certains objectifs en contraintes, et ainsi d'effectuer une optimisation sur tout au plus 1 ou 2 objectifs. Avec une telle approche, un algorithme comme BiMADS ou MultiMADS, qui n'est pas un algorithme heuristique, permettrait d'obtenir une certaine garantie quant à la qualité des solutions obtenues.

De plus, concernant l'optimisation de la trajectoire, seules les trajectoires linéaire et sinusoïdale ont été considérées compte tenu des fonctionnalités du robot SCOMPI. Toutefois, comme l'uniformité de martelage semble l'indiquer, ces trajectoires augmentent davantage la couverture et ce, à moindres effets sur les moniteurs de martelage. Ces moniteurs, ayant été définis en fonction de nos observations numériques et expérimentales, n'ont toutefois pas été corrélés à une augmentation de la vie en fatigue. Toutefois, de par les nombreux travaux disponibles dans la littérature ainsi que les récents travaux de Curtat (2016), les chances sont grandes que l'état modifié par martelage des contraintes résiduelles, et par le fait même nos moniteurs de martelage, augmente la vie en fatigue.

Finalement, une validation expérimentale préliminaire a été effectuée en comparant les stress longitudinales au cordon de soudure obtenues par martelage selon une trajectoire linéaire avec celles obtenues numériquement sous les mêmes conditions de martelage et pour l'acier 304L. Les valeurs expérimentales ont été mesurées avec la méthode des contours et sont illustrées à la Figure 9.1. On note que le profil de contrainte est initialement en tension en surface, passe par un maximum de compression (en valeur absolue) et transitionne à un état en tension. La différence entre les résultats provient en partie de la précision de la mesure des contraintes expérimentales, notamment en surface. Comme on peut le constater, l'allure générale est bien représentée par la simulation numérique, notamment en surface. Afin de rapprocher les résultats numériques des résultats expérimentaux, il faudrait simuler le débridage de la plaque puisque de légères contraintes de bridage sont présentes à la fin de la simulation numérique dûes aux conditions frontières. Malgré cela, l'erreur observée est acceptable compte tenu de l'incertitude des mesures expérimentales.



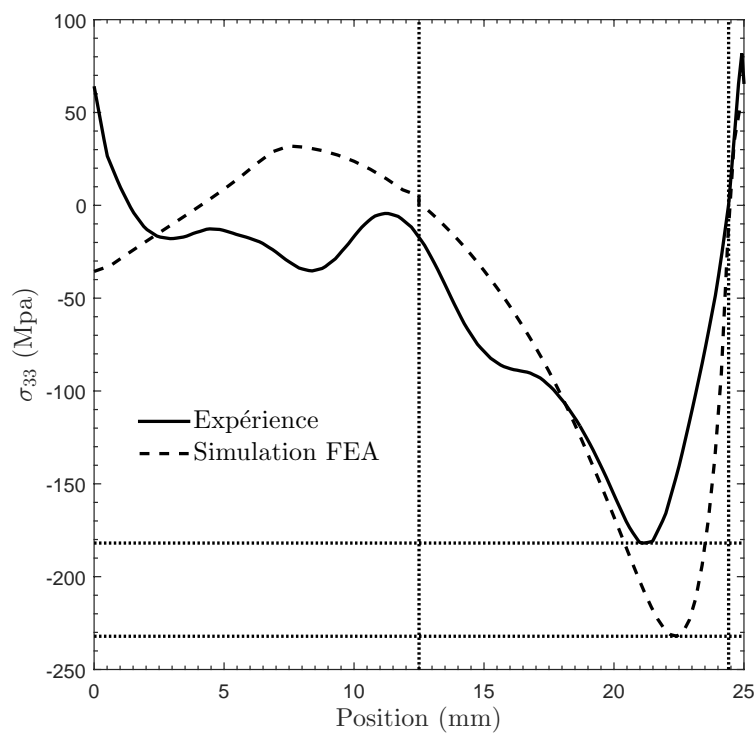


Figure 9.1 Comparaison des valeurs expérimentales avec numériques. Une trajectoire linéaire avec une vitesse d'avance de 4 mm/s, une fréquence de frappe de 36 Hz et un angle d'attaque de  $3.5^\circ$  est utilisé

## CHAPITRE 10 CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

### 10.1 Synthèse des travaux et contributions

Une nouvelle méthode développée pour l'optimisation SAO des paramètres de martelage est la contribution principale de ce projet de doctorat. Cette méthode diffère complètement des méthodes antérieures par le fait qu'une exploration mathématique, et non expérimentale, de l'espace des variables de conception est effectuée. L'évaluation subséquente des options se fait par l'entremise d'un métamodèle automatisé requérant peu d'interactions de l'opérateur, qui n'a qu'à lancer un nombre limité de simulations par éléments finis pour établir la base de son modèle d'optimisation.

Une autre contribution de ce doctorat est la détermination de la nature des variables objectifs afin de mettre en place un problème d'optimisation représentatif du martelage. Ces variables objectifs sont extraites des contraintes résiduelles induites par le martelage et sont telles qu'une optimisation de celles-ci entraîne un profil de contraintes résiduelles favorable à l'augmentation de la vie en fatigue. Ces *moniteurs* de martelage n'ont jamais été introduits auparavant dans le cadre du martelage. De plus, ce travail a permis de remettre en question l'hypothèse provenant du grenailage concernant l'importance de la couverture (%) sur la qualité du grenailage/martelage. Mon analyse a permis de conclure qu'une autre quantité, *l'uniformité* de martelage, pourrait être préférable pour l'évaluation de la qualité du martelage. Cette observation nous amène aussi à la remise en question d'une trajectoire sinusoïdale pour le martelage, puisque celle-ci semble ne pas être la meilleure trajectoire pour augmenter cette dernière quantité, malgré qu'elle représente une amélioration significative par rapport à une trajectoire linéaire.

D'autre part, ce projet de thèse a permis de déterminer le modèle constitutif adéquat pour la représentation du comportement macro-mécanique de l'acier martelé, soit le E309L. Le modèle élasto-plastique Johnson-Cook permet de prédire le comportement de l'acier E309L sur une plage d'opération représentative des conditions de martelage. Cette conclusion est maintenant possible à la suite des nombreux essais expérimentaux sur des échantillons de E309L extraits d'un dépôt de soudure représentatif. Puisque nous avons développé une procédure de développement de théories constitutives ainsi que pour l'implantation numérique de celles-ci dans un logiciel par éléments finis comme Abaqus, ce projet ouvre la porte au développement, à l'amélioration et à l'implantation de modèles complexes pour des procédés comme pour le soudage.

## 10.2 Travaux futurs

Tel que discuté en détail à la section 9.1, les sujets suivants pourraient faire l'objet de travaux futurs :

- (1) Jusqu'ici, l'outil d'optimisation considère un procédé de martelage stable et bien contrôlé. Toutefois, comme mentionné préalablement, la pratique diffère dans le fait que c'est un utilisateur qui *contrôle* les déplacements aléatoires du robot dus à la rigidité insuffisante du montage. Malheureusement, il est difficile, voir impossible de numériquement prédire ou corriger ces incertitudes. Des améliorations au niveau du montage du robot SCOMPI rapprocheraient certainement les simulations numériques à l'expérience.
- (2) Tel qu'introduit dans le second article, les moniteurs de martelage sont des quantités nouvelles pour lesquelles une optimisation entraîne un état de contraintes résiduelles optimal. Le problème d'optimisation est donc défini comme étant : *Quels sont les paramètres de martelage donnant les valeurs optimales pour ces moniteurs ?* Toutefois, la question demeure toujours en ce qui concerne l'importance de cet état de contraintes sur l'augmentation de la vie en fatigue. Plusieurs travaux pointent dans cette direction, notamment les travaux récents de Curtat (2016) et il est raisonnable de s'attendre à cette conclusion. Malgré cela, une confirmation est toujours nécessaire. De plus, un aspect qui n'a pas été considéré dans ce travail est l'effet du martelage sur le fini de surface, notamment au niveau de la rugosité et de la microstructure. Ceci pourrait jouer un grand rôle dans l'évaluation de la qualité du martelage. Il est à noter que cette quantité apporterait des réponses concernant le processus d'amorçage ou de propagation des fissures comparativement à d'autres procédés comme le grenaillage.
- (3) Dans tous les problèmes d'optimisation calculés dans ce travail (deuxième et quatrième articles), les solutions Pareto optimales sont toutes présentées dans  $N - 1$  graphiques représentant l'espace objectif en  $N$ -dimensions. De plus, les solutions Pareto optimales maximisant les variables objectifs individuellement sont aussi présentées. Toutefois, je ne propose pas de méthodologie unique pour choisir une solution et le choix ultime est laissé à l'utilisateur. Ce problème est récurrent dans la plupart des procédés comportant plusieurs objectifs, comme c'est le cas ici. Une des raisons pour cela est le manque d'information concernant l'importance relative de chacun des objectifs sur le procédé en question. Sous l'hypothèse d'une connaissance approfondie de ladite importance, des méthodes de poids pourraient être implantées permettant d'automatiser le choix d'une solution unique.
- (4) Dans le dernier article, on discute de la trajectoire sinusoidale présentement utilisée chez Hydro-Québec pour le martelage. On introduit aussi une nouvelle quantité, soit l'unifor-

mité de martelage, qui semble être plus appropriée que la couverture pour l'évaluation de la qualité du martelage. De plus, on remarque une corrélation presque linéaire entre les moniteurs et l'uniformité de martelage. Toutefois, après avoir lancé plus de 100 scénarios avec des trajectoires sinusoidales différentes, l'uniformité de martelage ne semble pas varier significativement, contrairement aux moniteurs de martelage. *Une petite variation dans l'uniformité de martelage semble affecter significativement les moniteurs de martelage.* Conséquemment, il serait intéressant d'évaluer l'impact de trajectoires alternatives (autre que sinusoidale) sur l'uniformité. Cela pourrait permettre une amélioration intéressante de l'état de contraintes résiduelles.

## RÉFÉRENCES

- Abaqus/Standard, “Abaqus/standard, version 6.13”, SIMULIA, Dassault Systèmes, 2013.
- M. Abdel-Karim et N. Ohno, “Kinematic hardening model suitable for ratchetting with steady-state”, *International Journal of Plasticity*, vol. 16, no. 3-4, pp. 225–240, 2000.
- T. Altan et F. Boulger, “Flow Stress of Metals and Its Application in Metal Forming Analyses”, *Journal of Industrial and Engineering Chemistry*, vol. 95, no. 4, pp. 1009–1973, 1973.
- L. Anand, “Constitutive equations for hot-working of metals”, *International Journal of Plasticity*, vol. 1, no. 3, pp. 213–231, 1985.
- D. Anderson, *Model Based Inference in the Life Sciences*. Springer-Verlag New York, 2008.
- T. Antics, R. Karim, et S. Paul, “Theoretical Basis in Regression Model Based Selection of the Most Cost Effective Parameters of Hard Rock Surface Mining”, *Scientific Research*, vol. 3, no. 2, pp. 156–161, 2011.
- P. J. Armstrong et C. O. Fredrick, “A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect.” CEGB report No. RD/B/N 73, 1966.
- ASTM-E8, “Tension testing of metallic materials”, ASTM Standards, 2011, designation : E8/E8M-11.
- C. Audet, G. Savard, et W. Zghal, “Multiobjective Optimization Through a Series of Single-Objective Formulations”, *SIAM Journal on Optimization*, vol. 19, no. 1, pp. 188–210, 2008.
- , “A mesh adaptive direct search algorithm for multiobjective optimization”, *European Journal of Operational Research*, vol. 204, no. 3, pp. 545–556, 2010.
- L. B. Ayed, A. Delameziere, J. Batoz, et C. Knopf-Lenoir, “Optimization of the blankholder force distribution in deep drawing.” dans *Proceedings of APOMAT*, Morschach, Switzerland, 2005, pp. 30 – 31.
- S. Balasubramanian et L. Anand, “Elasto-viscoplastic constitutive equations for polycrystalline fcc materials at low homologous temperatures.” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 50, pp. 101–126, 2002.

R. Baptista, V. Infante, et C. Branco, “Fully dynamic numerical simulation of the hammer peening fatigue life improvement technique”, dans *In the 11th International Conference on the Mechanical Behavior of Materials*, Milano, Italy, 2011, pp. 1943 – 1948.

S. Baragetti, “Shot peening optimisation by means of DOE : Numerical simulation and choice of treatment parameters”, *International Journal of Materials and Product Technology*, vol. 12, no. 2-3, pp. 83–109, Jan. 1997.

K. Bathe, *Finite Element Procedures*. Klaus-Jurgen Bathe, 2007.

G. Biron, A. Vadean, et L. Tudose, “Optimal design of interference fit assemblies subjected to fatigue loads.” *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2013.

M. Bonte, “Optimisation Strategy for Metal Forming Processes”, Thèse de doctorat, Twente University, 2007.

M. Bonte, A. van den Boogaard, et J. Huétink, “An optimisation strategy for industrial metal forming processes”, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 35, no. 6, pp. 571–586, 2008.

M. Bonte, L. Fourment, T.-T. Do, A. van den Boogaard, et J. Huétink, “Optimization of forging processes using Finite Element simulations”, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 42, no. 5, pp. 797–810, Nov. 2010.

A. Booker, J. Dennis, P. Frank, D. Serafini, V. Torczon, et M. Trosset, “A rigorous framework for optimization of expensive functions by surrogates”, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 17, no. 1, pp. 1–13, 1999.

S. Boyd et L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.

C. Branco, V. Infante, et R. Baptista, “Fatigue behaviour of welded joints with cracks, repaired by hammer peening”, *Fatigue and Fractures of Engineering Materials and Structures*, vol. 27, pp. 785–798, 2004.

P. Breitkopf et R. Coelho, *Multidisciplinary Design Optimization in Computational Mechanics*. Wiley, 2013.

T. Byun, N. Hashimoto, et K. Farrell, “Temperature dependence of strain hardening and plastic instability behaviors in austenitic stainless steels”, *Acta Materialia*, vol. 52, no. 13, pp. 3889–3899, 2004.

M. Caramia et P. Dell’Olmo, *Multi-objective Management in Freight Logistics*. Springer-Verlag London, 2008.

Y. Censor, “Pareto optimality in multiobjective problems”, *Applied Mathematics and Optimization*, vol. 4, no. 1, pp. 41–59, Mars 1977.

J. Chaboche, “Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity”, *International Journal of Plasticity*, vol. 5, no. 3.

——, “A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories”, *International Journal of Plasticity*, vol. 24, no. 10, pp. 1642–1693, Oct. 2008.

J. Chaboche et D. Nouailhas, “A unified constitutive model for cyclic viscoplasticity and its application to various stainless steels.” *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 111(4), pp. 424–430, 1989.

——, “A unified constitutive model for cyclic viscoplasticity and its application to various stainless steels”, *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 111, no. 4, pp. 424–430, Mars 1989.

T. Chaise, L. Jun, D. Nelias, R. Kubler, S. Taheri, G. Douchet, V. Robin, et P. Gilles, “Modelling of multiple impacts for the prediction of distortions and residual stresses induced by ultrasonic shot peening (usp)”, *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 212, no. 10, pp. 2080–2090, 2012.

K. Choi et N. Kim, *Structural Sensitivity Analysis and Optimization, 2nd Edition*. Springer, 2005.

W. Choi et G. Park, “Transformation of dynamic loads into equivalent static loads based on modal analysis”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, no. 1, pp. 29–43, Nov. 1999.

——, “Structural optimization using equivalent static loads at all time intervals”, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 191, no. 1, pp. 2077–2094, 2002.

A. Conn, K. Scheinberg, et L. Vicente, *Introduction to Derivative-Free Optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.

I. Couckuyt, A. Forrester, D. Gorissen, F. D. Turck, et T. Dhaene, “Blind Kriging : Implementation and performance analysis”, *Advances in Engineering Software*, vol. 49, no. 3, pp. 1–13, 2012.

- I. Couckuyt, T. Dhaene, et P. Demeester, *ooDACE toolbox : A Matlab Kriging toolbox : Getting started*, Universiteit of Gent, 2013. En ligne : <http://sumo.intec.ugent.be/ooDACE>
- , “ooDACE Toolbox : A Flexible Object-Oriented Kriging Implementation”, *Journal of Machine Learning Research*, vol. 15, pp. 3183–3186, 2014.
- N. Cressie et C. Wikle, *Statistics for Spatio-Temporal Data*. Wiley, 2011.
- N. D. Cunha et E. Polak, “Constrained minimization under vector-valued criteria in finite dimensional spaces”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 19, no. 1, pp. 103–124, Juil. 1967.
- J. Curtat, “Étude de l’effet du martelage sur la vie en fatigue de l’acier E309L utilisé pour une réparation de turbine 13%Cr-4%Ni”, Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, 2016.
- J. Davis, *Tensile Testing*. ASM International, 2004.
- K. Deb, *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*. Wiley, 2001.
- R. K. Devendranath, N. Arivazhagan, et S. Narayanan, “Hot Corrosion Studies on Bimetallic Combinations of Monel 400 and AISI 304 Subjected to Molten Salt Environment”, *Advanced Materials Research*, vol. 383-390, no. 11, pp. 3217–3222, Nov. 2011.
- C. Dietrich et M. Osborne, “Estimation of Covariance Parameters in Kriging via Restricted Maximum Likelihood”, *Mathematical Geology*, vol. 23, no. 1, pp. 119–135, 1991.
- V. Do, C.-H. Lee, et K.-H. Chang, “A constitutive model for uniaxial/multiaxial ratcheting behavior of a duplex stainless steel.” *Materials and Design*, vol. 65, pp. 1161–1171, 2015.
- A. Dorogoy et D. Rittel, “Determination of the Johnson-Cook Material Parameters using the SCS Specimen”, *Experimental Mechanics*, vol. 49, pp. 881–885, 2009.
- M. Ehtgott, *Multicriteria Optimization*. Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- R. Evans, “Shot peening process : modelling, verification and optimisation”, *Materials Science and Technology*, vol. 18, no. 8, pp. 831–839, 2002.
- G. Farrahi, J. Lebrijn, et D. Couratin, “Effect of shot peening on residual stress and fatigue life of a spring steel”, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 18, no. 2, pp. 211–220, 1995.



J. Fihey, R. Simoneau, D. Thibault, J. Lanteigne, H. Nasri, et Y. Laroche, “Controlled hammer-peening on a restrained a514 (s690q) weldment”, dans *In Institute for Materials Science, Welding and Forming (IWS)*, University of Technology Graz, 2005.

A. Forrester, A. Sobester, et A. Keane, *Engineering Design via Surrogate Modelling : A Practical Guide*. Wiley, 2008.

——, “Multi-fidelity optimization via surrogate modelling”, *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 463, pp. 3251–3269, 2007.

D. Freedman, “A note on screening regression equations”, *The American Statistician*, vol. 37, no. 2, pp. 152–155, 1983.

M. Frija, T. Hassine, R. Fathallah, C. Bouraoui, et A. Dogui, “Finite element modelling of shot peening process : Prediction of the compressive residual stresses, the plastic deformations and the surface integrity”, *Materials Science and Engineering : A*, vol. 426, no. 1-2, pp. 173–180, 2006.

H. J. Frost et M. F. Ashby, *Deformation-mechanism maps*. Pergamon Press, 1982.

A. Gariépy, S. Larose, C. Perron, et M. Lévesque, “Shot peening and peen forming finite element modelling — Towards a quantitative method”, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 48, no. 20, pp. 2859–2877, Oct. 2011.

P. George, N. Pillai, et N. Shah, “Optimization of shot peening parameters using Taguchi technique”, *Journals of Materials Processing Technology*, vol. 153-154, no. 10, pp. 925–930, Nov. 2004.

A. Gheribi, J. Harvey, E. Belisle, C. Robelin, P. Chartrand, A. Pelton, C. Bale, et S. Digabel, “Use of a biobjective direct search algorithm in the process design of material science applications”, *Optimization and Engineering*, 2016. DOI : 10.1007/s11081-015-9301-2

A. Giunta, S. Wojtkiewicz, et M. Eldred, “Overview of modern design of experiments methods for computational simulations”, dans *In 41st AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno NV, USA, 2003, pp. 144 – 148.

S. Godin, D. Thibault, et J. B. Levesque, “An Experimental Comparison of Weld-Induced Residual Stresses Using Different Stainless Steel Filler Metals Commonly Used for Hydraulic Turbines Manufacturing and Repair”, *Materials Science Forum*, vol. 768–769, pp. 628–635, 2013.

P. Goovaerts, *Geostatistics for Natural Resources Evaluation*. Oxford University Press, 1997.

M. Guagliano, “Relating almen intensity to residual stresses induced by shot peening : a numerical approach”, *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 110, no. 3, pp. 277–286, 2001.

M. E. Gurtin, E. Fried, et L. Anand, *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*. Cambridge University Press, 2010.

L. Hacini, N. Lê, et P. Bocher, “Effect of impact energy on residual stresses induced by hammer peening of 304L plates”, *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 208, no. 1-3, pp. 542–548, Nov. 2008.

——, “Evaluation of residual stresses induced by robotized hammer peening by the contour method”, *Experimental Mechanics*, vol. 49, no. 6, pp. 775–783, Nov. 2009.

P. Hajela et C. Lin, “Genetic search strategies in multicriterion optimal design”, *Structural Optimization*, vol. 4, no. 2, pp. 99–107, Juin 1992.

R. Hill, “A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals”, *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. 193, no. 1033, pp. 281–297, 1948.

W. Hines, D. Montgomery, D. Goldsman, et C. Borrer, *Probabilités et Statistiques pour ingénieurs, 2e édition*. Chenelière-Éducation, 2011.

E. Hinton et B. Irons, “Least squares smoothing of experimental data using finite elements”, *Strain*, vol. 4, no. 3, pp. 24–27, 1968.

J. Holland, *Adaption in natural and artificial systems*. University of Michigan Press, 1975.

J. Horn, N. Nafpliotis, et D. Goldberg, “A niched pareto genetic algorithm for multiobjective optimization”, dans *Proceedings of the first IEEE conference on evolutionary computation*, Orlando FL, USA, 1994, pp. 82–87.

A. Hrennikoff, “Solution of problems of elasticity by the framework method”, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 8, no. 4, pp. 169–175, 1941.

E. Isaaks et R. Srivastava, *An Introduction to Applied Geostatistics*. Oxford University Press, 1989.

Y. Jiang et H. Sehitoglu, “Modeling of cyclic ratcheting plasticity, part i : Development of constitutive relations.” *Journal of Applied Mechanics*, 1996.

M. Jirasek et Z. Bazant, *Inelastic Analysis of Structures*. Wiley, 2001.

G. Johnson et W. Cook, “A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures”, *Proceedings of the 7th International Symposium on Ballistics*, pp. 541–547, 1983.

M. Johnson, L. Moore, et D. Ylvisaker, “Minimax and maximin distance designs”, *Journal of Statistical Planning and Inference*, vol. 26, no. 2, pp. 131–148, Oct. 1990.

D. Jones, M. Schonlau, et W. Welch, “Efficient global optimization of expensive black-box functions”, *Journal of Global Optimization*, vol. 13, no. 4, pp. 455–492, 1998.

C. E.-P. Jr., H. Sehitoglu, H. Maier, et T. Foglesong, “Thermo-mechanical fatigue behavior of cast 319 aluminum alloys”, pp. 1 – 3, 2002.

C. E.-P. Jr., H. Sehitoglu, et H. Maier, “Cyclic behavior of al319-t7b under isothermal and non-isothermal conditions”, dans *Thermomechanical Fatigue Behavior of Materials*, série Thermomechanical Deformation Behavior and Modeling. McGraw MA, 2003, vol. 4, pp. 45 – 64.

G. Kang, “Ratchetting : Recent progresses in phenomenon observation, constitutive modeling and application”, *International Journal of Fatigue*, vol. 30, no. 8, pp. 1448–1472, 2008.

G. Kang et Q. Kan, “Constitutive modeling for uniaxial time-dependent ratcheting of SS304 stainless steel”, *Mechanics of Materials*, vol. 39, no. 5, pp. 488–499, 2007.

G. Kang, Q. Gao, L. Cai, et Y. Sun, “Experimental study on uniaxial and nonproportionally multi-axial ratcheting of SS304 stainless steel at room and high temperatures”, *Nuclear Engineering and Design*, vol. 216, pp. 13–26, 2002.

——, “Experimental study on uniaxial and nonproportionally multi-axial ratcheting of SS304 stainless steel at room and high temperatures”, *Nuclear Engineering and Design*, vol. 216, no. 1-3, pp. 13–26, 2002.

G. Kang, Q. Gao, et X. J. Yang, “A visco-plastic constitutive model incorporated with cyclic hardening for uniaxial/multi-axial ratchetting of SS304 stainless steel at room temperature”, *Mechanics of Materials*, vol. 34, pp. 521–531, 2002.

G. Kang, Q. Gao, et X. Yang, “A visco-plastic constitutive model incorporated with cyclic hardening for uniaxial/multiaxial ratchetting of SS304 stainless steel at room temperature”, *Mechanics of Materials*, vol. 34, no. 9, pp. 521–531, 2002.

G. Kang, O. Bruhns, et K. Sai, “Cyclic polycrystalline visco-plastic model for ratchetting of 316 stainless steel”, *Computational Materials Science*, vol. 50, no. 4, pp. 1399–1405, 2011.

X. Kang, T. Wang, et J. Platts, “Multiple impact modelling for shot peening and peen forming”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B : Journal of Engineering Manufacture*, vol. 224, pp. 689–697, Oct. 2009.

R. Kass et L. Wasserman, “A Reference Bayesian Test for Nested Hypotheses and its Relationship to the Schwarz Criterion”, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 90, no. 431, pp. 928–934, Sep. 1995.

N. Khutia, P. Dey, et T. Hassan, “An improved non proportional cyclic plasticity model for multiaxial low-cycle fatigue and ratcheting responses of 304 stainless steel”, *Mechanics of Materials*, vol. 91, no. 1.

N. Khutia, P. Dey, S. Sivaprasad, et S. Tarafder, “Development of new cyclic plasticity model for 304LN stainless steel through simulation and experimental investigation”, *Mechanics of Materials*, vol. 78, pp. 85–101, Nov. 2014.

K. Kirkhope, R. Bell, L. Caron, R. Basu, et K.-T. Ma, “Weld detail fatigue life improvement techniques. Part 1 : review”, *Marine Structures*, vol. 12, no. 6, pp. 447–474, 1999.

U. F. Kocks, “Laws for work-hardening and low-temperature creep.” *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 98, pp. 76–85, 1976.

A. Konak, D. Coit, et A. Smith, “Multi-objective optimization using genetic algorithms : A tutorial”, *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 91, pp. 992–1007, Jan. 2006.

E. Krempl, “An experimental study of room-temperature rate-sensitivity, creep and relaxation of AISI type 304 stainless steel”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 27, no. 5-6, pp. 363–375, DÃlc. 1979.

D. Krige, “A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand”, *Journal of the Chemical, Metallurgical and Mining Society of South Africa*, pp. 201–215, 1952.

J. Lantaigne, “Simulation élasto-plastique 2d du martelage. application à l’acier au carbone a-516 et à l’acier inoxydable 304”, IREQ, 2004.

J. Lantaigne, C. Baillargeon, et L. Marcouiller, “Mesure de la résistance de certains aciers utilisés dans la fabrication et la réparation de roues de turbines hydrauliques”, IREQ, 2001.

Y. Laroche, R. Dubois, P. Mongenot, et B. H. J. Fihey, “Renforcement de la couronne du groupe 19 de la centrale de beauharnois”, IREQ, 2002.

W.-S. Lee, J.-I. Cheng, et C.-F. Lin, “Deformation and failure response of 304L stainless steel SMAW joint under dynamic shear loading”, *Materials Science and Engineering A*, vol. 381, pp. 206–215, 2004.

J.-P. Lessard, “Mise à niveau sur l’utilisation du procédé de martelage double dans le cadre du renforcement du groupe 2 de la centrale de beauharnois”, IREQ, 2005.

J. Lévesque, J. Lantaigne, et D. Paquet, “État de l’art sur les transformations de phase de l’acier 13%cr-4%ni appliquées à la simulation numérique du soudage”, IREQ, 2013.

J. Lim, M. Yoon, S. Kim, H. Shin, et T. Kim, “Mechanical properties of CO2/MIG welded structural rolled steel and stainless steel”, *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 29, no. 1, pp. 103–108, 2015.

J. Liu, W. Gou, W. Liu, et Z. Yue, “Effect of hammer peening on fatigue life of aluminum alloy 2A12-T4”, *Materials and Design*, vol. 30, no. 6, pp. 1944–1949, 2009.

S. Lophaven, H. Nielsen, et J. Sondergaard, *Aspects of the Matlab Toolbox Dace*, Technical University of Denmark, DK-2800, Kgs., Lyngby, Denmark, 2002.

———, *DACE : A Matlab Kriging Toolbox*, Technical University of Denmark, DK-2800, Kgs., Lyngby, Denmark, 2002. En ligne : [hbn@imm.dtu.dk](mailto:hbn@imm.dtu.dk)

———, *Aspects of the Matlab Toolbox Dace*, Technical University of Denmark, DK-2800, Kgs., Lyngby, Denmark, 2002. En ligne : [hbn@imm.dtu.dk](mailto:hbn@imm.dtu.dk)

J. Luk-Cyr, R. El-Bawab, H. Champiaud, J. Lantaigne, et A. Vadean, “Sequential approximate optimization of industrial hammer peening using finite element simulations”, *Structural and Multidisciplinary Optimization.*, 2016.

M. Mackay, R. Beckman, et W. Conover, “A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output From a Computer Code”, *Technometrics*,

vol. 42, no. 1, pp. 55–61, Mars 2000.

P. Mann, H. Miao, A. Gariépy, M. Lévesque, et R. Chromik, “Residual stress near single shot peening impingements determined by nanoindentation and numerical simulations”, *Journal of Materials Science*, vol. 50, no. 5, pp. 2284–2297, 2015.

Matlab, *Global Optimization Toolbox User’s Guide*, MathWorks, 3 Apple Hill Drive, Natick, MA, USA 01760-2098, 2015. En ligne : [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)

——, *Statistics and Machine Learning Toolbox User’s Guide*, MathWorks, 3 Apple Hill Drive, Natick, MA, USA 01760-2098, 2015. En ligne : [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)

A. Maurel-Pantel, M. Fontaine, S. Thibaud, et J. Gelin, “3D FEM simulations of shoulder milling operations on a 304L stainless steel”, *Simulation Modelling Practice and Theory*, vol. 22, pp. 13–27, 2012.

S. Meguid, G. Shagal, J. Stranart, et J. Daly, “Three-dimensional dynamic finite element analysis of shot-peening induced residual stresses”, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 31, no. 3, pp. 179–181, Jan. 1999.

S. Meguid, G. Shagal, et J. Stranart, “3d fe analysis of peening of strain-rate sensitive materials using multiple impingement model.” *International Journal of Impact Engineering*, 2002.

A. Meyer et M. D. Toit, “The Influence of Interstitial Diffusion Across the Fusion Line on the HAZ Microstructure and Properties in 12% Chromium Type 1.4003 Steels”, *Welding in the World*, vol. 52, no. 11, pp. 42–49, Nov. 2008.

H. Miao, D. Demers, S. Laroce, C. Perron, et M. Lévesque, “Experimental study of shot peening and stress peen forming”, *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 210, no. 15, pp. 2089–2102, Nov. 2010.

H. Miao, S. Laroce, C. Perron, et M. Lévesque, “An analytical approach to relate shot peening parameters to Almen intensity”, *Surface and coatings technology*, vol. 205, no. 7, pp. 2055–2066, DÃlc. 2010.

——, “Numerical simulation of the stress peen forming process and experimental validation”, *Advances in Engineering Software*, vol. 42, no. 11, pp. 963–975, Nov. 2011.

A. Molinari et S. A. G.R. Canova, “A self consistent approach of the large deformation polycrystal viscoplasticity”, *Acta Metallurgica*, vol. 35, no. 12, pp. 2983–2994, 1987.

N. Morin, Y. Laroche, R. Dubois, D. Thibault, J. Fihey, P. Mongenot, et B. Hazel, “Essais de martelage robotisé”, IREQ, 2001.

M. Morris et T. Mitchell, “Exploratory designs for computational experiments”, *Journal of Statistical Planning and Inference*, vol. 43, no. 3, pp. 381–402, FÃlv. 1995.

T. Murata et H. Ishibuchi, “Moga : multi-objective genetic algorithms”, dans *Proceedings of the IEEE conference on evolutionary computation*, Perth WA, Australia, 1995, p. 1.

K. Murugaratnam, S. Utili, et N. Petrinic, “A combined DEM-FEM numerical method for Shot Peening parameter optimisation”, *Advances in Engineering Software*, vol. 79, no. 2015, pp. 13–26, Jan. 2015.

R. Myers, D. Montgomery, et M. Anderson-Cook, *Response Surface Methodology : Process and Product Optimization Using Designed Experiments*, 3rd edition. Wiley, 2002.

S. Nemat-Nasser, *Plasticity : A treatise on the finite deformation of heterogeneous inelastic materials*. Cambridge University Press, 2004.

J. Neter, M. Kutner, C. Nachtsheim, et W. Wasserman, *Applied linear statistical model*, 4th edition. R.D. Irwin, 1996.

N.Srinivas et K. Deb, “Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms”, *Journal of Evolutionary Computation*, vol. 2, no. 3, pp. 221–248, Sep. 1994.

N. Ohno et J.-D. Wang, “Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery. Part I : formulations and basic features for ratcheting behaviour”, *International Journal of Plasticity*, vol. 9, no. 3, pp. 375–403, 1993.

——, “Kinematic hardening rules for simulation of ratcheting behaviour”, *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 13, no. 4, pp. 519–531, 1994.

D. Paquet, “Modélisation des contraintes résiduelles thermiques et étude de leur effet sur la vie en fatigue de l’acier inoxydable austénitique 304L”, Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, 2006.

D. Paquet, J. Lantaigne, et M. Bernard, “A new experimental method for the introduction of a predetermined amount of residual stress in fatigue test specimen”, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 79, no. 6, pp. 1–13, 2012.

- P. Perzyna, “Thermodynamic theory of viscoplasticity”, dans *Advances in Applied Mechanics*. Academic Press New York, 1971, vol. 11, pp. 313 – 354.
- C. Pile, M. Francois, D. Retraint, E. Rouhaud, et J. Lu, “Modelling of the ultrasonic shot peening process”, *Materials Science Forum*, vol. 490–491, pp. 67–72, 2012.
- D. Posada et T. Buckley, “Model Selection and Model Averaging in Phylogenetics : Advantages of Akaike Information Criterion and Bayesian Approaches Over Likelihood Ratio Tests”, *Systematic Biology*, vol. 53, no. 5, pp. 793–808, 2004.
- J. Romero, “Numerical simulation and prediction of needle peening effects in aluminum alloy 2024-T3 sheets”, Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, 2016.
- S. Ruzika et M. Wiecek, “Approximation Methods in Multiobjective Programming”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 126, no. 3, pp. 473–501, Sep. 2005.
- J. Sacks, W. Welch, T. Mitchell, et H. Wynn, “Design and Analysis of Computer Experiments”, *Technometrics*, vol. 4, no. 4, pp. 409–423, Nov. 1989.
- SAE-J2277, “Shot peening coverage determination”, SAE Surface Enhancement Division, 2009, designation : SAE J2277.
- P. Sanjurjo, C. Rodriguez, I. Penuelas, T. Garcia, et F. Belzunce, “Influence of the target material constitutive model on the numerical simulation of a shot peening process.” *Surface & Coatings Technology*, 2014.
- T. J. Santner, B. J. Williams, et W. I. Notz, *The Design and Analysis of Computer Experiments*. Springer, 2003.
- J. Schaffer, “Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms”, dans *Proceedings of the 1st International Conference on Genetic Algorithms*, Hillsdale NJ, USA, 1985, pp. 93–100.
- G. Schwarz, “Estimating the dimension of a model”, *The Annals of Statistics*, vol. 6, no. 2, pp. 461–464, Mars 1978.
- R. Simoneau, “Déformation de plaques d’aciers par le martelage multi-passe robotisé”, IREQ, 2004.
- R. Simoneau, D. Thibault, et J.-L. Fihey, “A comparison of residual stress in hammer-peened, multi-pass steel welds - A514(S690Q) and S41500.” *Welding in the World*, vol. 53,



no. 5-6, pp. R124–R134, 2009.

F. Siska, L. Stratil, M. Smid, N. Luptakova, et T. Zalezak, “Deformation and fracture behavior of the P91 martensitic steel at high temperatures”, *Materials Science and Engineering A*, vol. 672, pp. 1–6, 2016.

D. Slavic et H. Sehitoglu, “Constitutive models suitable for thermal loading”, *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 108, no. 4, pp. 303–312, Oct. 1986.

W. Stadler, “A survey of Multicriteria Optimization or the Vector Maximum Problem, Part I : 1776-1960”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 29, no. 1, pp. 1–52, Sep. 1979.

——, *Multicriteria Optimization in Engineering and in the Sciences*. Springer New York, 1988.

A. Stein, F. van der Meer, et B. Gorte, *Spatial Statistics for Remote Sensing*. Springer New York, 2002.

M. Stein, “Large Sample Properties of Simulations Using Latin Hypercube Sampling”, *Technometrics*, vol. 29, no. 2, pp. 143–151, Mars 1987.

R. Steuer, *Multiple Criteria Optimization : Theory, Computation, and Application*. Wiley, 1986.

S. Tekeli, “Enhancement of fatigue strength of SAE 9245 steel by shot peening”, *Material Letters*, vol. 57, pp. 604–608, 2002.

D. Thibault, R. Laliberté, et J. Fihey, “Mesures des contraintes induites et évaluation de l’efficacité du martelage lors du soudage dun montage tentant de reproduire le soudage des roues de turbines hydrauliques”, IREQ, 2000.

D. Thibault, R. Simoneau, J. Lanteigne, et J. Fihey, “Residual stresses induced by robotized hammer-peening”, dans *In Materials Science Forum. Trans Tech Publications*, Durnten, Switzerland, 2005, pp. 352–357.

M. Torres et H. Voorwald, “An evaluation of shot peening, residual stress and stress relaxation on the fatigue life of AISI 4340 steel”, *International Journal of Fatigue*, vol. 24, no. 8, pp. 877–886, 2002.

- H. Weistroffer, C. Smith, et S. Narula, “Multiple criteria decision support software”, dans *Multiple Criteria Decision Analysis : State of the Art Surveys*. Springer New York, 2005, vol. 78, pp. 989–1009.
- X. D. Z. L. Wang, “Mechanical Property and Corrosion Resistance of the E309L Buffer Layer in Weld Overlay”, *Applied Mechanics and Materials*, vol. 668-669, no. 1, pp. 39–42, Oct. 2014.
- L. Zadeh, “Optimality and non-scalar-valued performance criteria”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 8, no. 1, pp. 59–60, Jan. 1963.
- Y. Zhang, C. Bajaj, et B. Sohn, “3D Finite Element Meshing from Imaging Data”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, no. 48-49, pp. 5083–5106, Nov. 2009.
- Y. Zhu, G. Kang, Q. Kan, O. Bruhns, et Y. Liu, “Thermo-mechanically coupled cyclic elasto-viscoplastic constitutive model of metals : theory and application. (in press)”, *International Journal of Plasticity*, 2015.
- O. Zienkiewicz et I. Corneau, “Visco-plasticity, plasticity and creep in elastic solidsâ a unified numerical solution approach”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 8, no. 4, pp. 821–845, 1963.
- O. Zienkiewicz, R. Taylor, et J. Zhu, *The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals, Seventh Edition*. Butterworth-Heinemann, 2013.
- E. Zitzler et L. Thiele, “Multiobjective evolutionary algorithms : a comparative case study and the strength Pareto approach”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 3, no. 4, pp. 257–271, Nov. 1999.

## ANNEXE A   KRIGEAGE

Cette annexe expose le lecteur au développement mathématique derrière le krigeage. Seul un survol des grandes équations est présenté, puisque la démarche complète est disponible dans (Goovaerts, 1997).

Le krigeage est une variante de la régression linéaire et son estimateur  $\hat{\mathbf{y}}(\hat{\mathbf{x}})$  prend la forme générale

$$\hat{\mathbf{y}}(\hat{\mathbf{x}}) = \boldsymbol{\mu}(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{\alpha=1}^A \lambda_{\alpha} (\mathbf{y}(\mathbf{x}_{\alpha}) - \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}_{\alpha})), \quad (\text{A.1})$$

où  $\hat{\mathbf{x}}$  est le vecteur de position pour l'estimation,  $\mathbf{x}_{\alpha}$  est le vecteur position pour les points limitrophes  $\alpha$ ,  $\boldsymbol{\mu}$  et  $\boldsymbol{\mu}_{\alpha}$  sont les espérances pour  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{y}(\mathbf{x}_{\alpha})$ , respectivement, et  $\lambda_{\alpha}$  sont les poids de krigeage associé aux points  $\alpha$ , pour l'estimation  $\mathbf{x}$  choisie. La première composante de l'équation représente la partie déterministe du modèle, tandis que la seconde représente un résidu stochastique,  $\mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{\alpha=1}^A \lambda_{\alpha} (\mathbf{y}(\mathbf{x}_{\alpha}) - \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}_{\alpha}))$ . Comme mentionné préalablement, le krigeage estime ce résidu comme une somme pondérée des résidus aux points limitrophes, avec les poids  $\lambda_{\alpha}$  dérivés d'une fonction de covariance au lieu d'un simple polynôme.

L'objectif est désormais de déterminer les poids  $\lambda_{\alpha}$  qui *minimisent* la variance de l'estimateur, soit

$$\sigma_E^2(\hat{\mathbf{x}}) = Var(\hat{\mathbf{y}}(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{y}(\hat{\mathbf{x}})), \quad (\text{A.2})$$

sous la contrainte classique d'un estimateur non biaisé

$$E(\hat{\mathbf{y}}(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{y}(\hat{\mathbf{x}})) = 0, \quad (\text{A.3})$$

où  $E(\cdot)$  est l'espérance.

Par la suite, on traite le résidu stochastique comme étant une variable aléatoire avec une espérance stationnaire nulle<sup>1</sup> et une covariance stationnaire fonction de la distance  $\mathbf{h}$  entre deux points, mais non de la position  $\hat{\mathbf{x}}$ . Cela se traduit mathématiquement par

$$E(\mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}})) = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$Cov(\mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}), \mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{h})) = E(\mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{h})) = C_r(\mathbf{h}), \quad (\text{A.5})$$

où  $C_r(\mathbf{h})$  est la matrice de covariance du résidu.

---

1. Le concept de stationnarité pour une variable aléatoire indique une indépendance d'une quantité par rapport à l'espace (ou au temps dans le contexte de l'économie).

Jusqu'ici, l'approche est générale et valide peu importe le type de krigeage utilisé. Nous allons maintenant discuter de trois variantes possibles, soit les *krigeage simple*, *ordinaire* et *universel*.

\*

Krigeage simple Pour le krigeage simple, l'espérance est supposée constante et connue,  $\boldsymbol{\mu}(\hat{\mathbf{x}}) = \boldsymbol{\mu}$ , tel que (A.1) devient

$$\hat{\mathbf{y}}_{ks}(\hat{\mathbf{x}}) = \boldsymbol{\mu} + \sum_{\alpha=1}^A \lambda_{\alpha}^{ks} (\mathbf{y}(\mathbf{x}_{\alpha}) - \boldsymbol{\mu}). \quad (\text{A.6})$$

On remarque directement que pour espérance constante et connue, on a  $E(\mathbf{y}(\mathbf{x}_{\alpha}) - \boldsymbol{\mu}) = 0$ , et donc  $E(\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) = \boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{y}(\hat{\mathbf{x}}))$ . L'estimateur est bel est bien non biaisé. Par la suite, on peut évaluer l'erreur d'estimation de la manière suivante

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}_{ks}(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{y}(\hat{\mathbf{x}}) &= [\hat{\mathbf{y}}_{ks}(\hat{\mathbf{x}}) - \boldsymbol{\mu}] - [\mathbf{y}(\hat{\mathbf{x}}) - \boldsymbol{\mu}] \\ &= \sum_{\alpha=1}^A \lambda_{\alpha}^{ks} \mathbf{r}(\mathbf{x}_{\alpha}) - \mathbf{r}_{ks}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{r}}_{ks}(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{r}_{ks}(\hat{\mathbf{x}}). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

En utilisant maintenant les règles d'opérations sur la variance d'une combinaison linéaire, on peut démontrer que la variance de l'estimateur du résidu est

$$\begin{aligned} \sigma_E^2(\hat{\mathbf{x}}) &= \text{Var}\{\hat{\mathbf{r}}_{ks}(\hat{\mathbf{x}})\} + \text{Var}\{\mathbf{r}_{ks}(\hat{\mathbf{x}})\} - 2\text{Cov}\{\hat{\mathbf{r}}_{ks}(\hat{\mathbf{x}}), \mathbf{r}_{ks}(\hat{\mathbf{x}})\} \\ &= \sum_{\alpha=1}^A \sum_{\beta=1}^A \lambda_{\alpha}^{ks} \lambda_{\beta}^{ks} C_r(\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}_{\beta}) + C_r(0) - 2 \sum_{\alpha=1}^A \lambda_{\alpha}^{ks} C_r(\mathbf{x}_{\alpha} - \hat{\mathbf{x}}). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Comme mentionné auparavant, un aspect important du krigeage est la minimisation de la variation de l'estimateur, ou de son erreur afin d'obtenir les poids de krigeage. On cherche alors à minimiser (A.8). On prend donc les dérivées de (A.8) par rapport aux poids de krigeage, et on égalise ce système d'équations linéaires au vecteur nul. On obtient alors le système d'équations suivant

$$\sum_{\beta=1}^A \lambda_{\beta}^{ks} C_r(\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}_{\beta}) = C_r(\mathbf{x}_{\alpha} - \hat{\mathbf{x}}), \quad \alpha = 1, \dots, A. \quad (\text{A.9})$$

Maintenant, puisque nous avons supposé une espérance constante  $\boldsymbol{\mu}$ , on peut démontrer que la covariance de  $\mathbf{y}(\hat{\mathbf{x}})$  est équivalente à la covariance du résidu  $\mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}})$ , donc  $C(\hat{\mathbf{x}}) = C_r(\hat{\mathbf{x}})$ . Le

système d'équations linéaires peut donc être simplifié par

$$\sum_{\beta=1}^A \lambda_{\beta}^{ks} C(\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}_{\beta}) = C(\mathbf{x}_{\alpha} - \hat{\mathbf{x}}), \quad \alpha = 1, \dots, A, \quad (\text{A.10})$$

ou, sous forme matricielle

$$\mathbf{K}^{ks} \boldsymbol{\lambda}_{ks}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{k}^{ks}, \quad (\text{A.11})$$

où  $\mathbf{K}^{ks}$  est la matrice de covariance entre les points,

$$K_{ij}^{ks} = C(x_i - x_j), \quad (\text{A.12})$$

et  $\mathbf{k}^{ks}$  est le vecteur de covariance entre le point estimé et les points limitrophes,

$$k_i^{ks} = C(x_i - \hat{x}). \quad (\text{A.13})$$

De plus, si les points sont distincts et que le modèle de corrélation est admissible, alors la matrice de covariance sera définie positive et on peut résoudre pour le vecteur de poids de krigeage

$$\boldsymbol{\lambda}_{ks}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{k}^{ks\top} \mathbf{K}^{ks-1}. \quad (\text{A.14})$$

En substituant les poids dans (A.6) et (A.8), on obtient les relations suivantes pour l'estimateur et sa variance

$$\hat{\mathbf{y}}_{ks}(\hat{\mathbf{x}}) = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{k}^{ks\top} \mathbf{K}^{ks-1} (\mathbf{y}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\mu}), \quad (\text{A.15})$$

$$\sigma_{ks}^2 = C(0) - \mathbf{k}^{ks\top} \boldsymbol{\lambda}_{ks}(\hat{\mathbf{x}}). \quad (\text{A.16})$$

En somme, l'estimateur de krigeage cherche une liste de poids de krigeage afin d'estimer la réponse au point  $\hat{\mathbf{x}}$  à partir d'un ensemble de points limitrophes  $\mathbf{x}$ . Le poids associé à chacun de ces points diminue en fonction de la distance du point estimé, proportionnellement au vecteur de covariance  $\mathbf{k}^{\top}$  calculé à partir des points disponibles.

\*

**Krigeage ordinaire** Le krigeage ordinaire est similaire au krigeage simple. La différence principale se situe au niveau de l'espérance de l'estimateur. Dans le krigeage simple, on suppose que la partie déterministe est constante et connue dans tout le domaine d'étude (i.e.  $\boldsymbol{\mu}(\hat{\mathbf{x}}) = \boldsymbol{\mu}$ ). Ici, on suppose maintenant que l'espérance de l'estimateur n'est constante que dans le voisinage du point estimé  $\hat{\mathbf{x}}$ , soit  $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}_{\alpha}) = \boldsymbol{\mu}(\hat{\mathbf{x}})$  et ce, pour chaque valeur  $\mathbf{y}(\mathbf{x}_{\alpha})$  utilisée pour

évaluer  $\hat{\mathbf{y}}(\hat{\mathbf{x}})$ . L'estimateur de krigeage (A.1) devient alors

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{y}}_{ko}(\hat{\mathbf{x}}) &= \boldsymbol{\mu}(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{\alpha=1}^A \lambda_{\alpha}^{ko} (\mathbf{y}(\mathbf{x}_{\alpha}) - \boldsymbol{\mu}(\hat{\mathbf{x}})), \\ &= \sum_{\alpha=1}^A \lambda_{\alpha}^{ko} \mathbf{y}(\mathbf{x}_{\alpha}) + \left[1 - \sum_{\alpha=1}^A \lambda_{\alpha}^{ko}\right] \boldsymbol{\mu}(\hat{\mathbf{x}}).\end{aligned}\tag{A.17}$$

Toutefois, puisque qu'on a maintenant une inconnue additionnelle  $\boldsymbol{\mu}(\hat{\mathbf{x}})$ , nous avons besoin d'une autre contrainte pour résoudre le problème. Cette contrainte est la condition que la somme des poids de krigeage forme une partition unitaire, soit  $\sum_{\alpha=1}^A \lambda_{\alpha}^{ko} = 1$ . L'équation (A.17) devient alors

$$\hat{\mathbf{y}}_{ko}(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{\alpha=1}^A \lambda_{\alpha}^{ko} \mathbf{y}(\mathbf{x}_{\alpha}), \quad \text{avec} \quad \sum_{\alpha=1}^A \lambda_{\alpha}^{ko} = 1.\tag{A.18}$$

Afin d'obtenir les poids de krigeage, nous devons maintenant résoudre un problème de minimisation de la variance d'estimation similaire à (A.8), mais cette fois-ci sujet à une contrainte linéaire. L'approche classique est donc de transformer ce problème sous contraintes en introduisant un multiplicateur de Lagrange  $\mathcal{L}$  de telle sorte que (voir Boyd and Vandenberghe, 2004)

$$L = \sigma_E^2(\hat{\mathbf{x}}) + 2\mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}) \left[1 - \sum_{\alpha=1}^A \lambda_{\alpha}^{ko}\right],\tag{A.19}$$

devient le problème à minimiser. Prenant maintenant la dérivée par rapport aux paramètres (i.e. les poids de krigeage et le paramètre de Lagrange), on obtient le système d'équations linéaires suivant

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^A \lambda_{\beta}^{ko} C_r(\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}_{\beta}) + \mathcal{L} = C_r(\mathbf{x}_{\alpha} - \hat{\mathbf{x}}), & \alpha = 1, \dots, A, \\ \sum_{\beta=1}^A \lambda_{\beta}^{ko} = 1. \end{cases}\tag{A.20}$$

On remarque que le système d'équations linéaires à résoudre ci-haut est presque identique à celui pour le krigeage simple, modulo une inconnue additionnelle pour le paramètre Lagrangien. Sous forme matricielle, on a

$$\mathbf{K}^{ko} \boldsymbol{\lambda}_{ko}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{k}^{ko},\tag{A.21}$$

où  $\mathbf{K}^{ko}$ ,  $\mathbf{k}^{ko}$  et  $\boldsymbol{\lambda}_{ko}(\hat{\mathbf{x}})$  est la matrice de covariance, le vecteur de covariance et les poids de krigeage *augmentés* du terme Lagrangien.

On rappelle que dans le cas du krigeage simple, on avait que la fonction de covariance pour

le résidu était égale à celle de l'estimateur lui-même, i.e.  $C_r(\mathbf{h}) = C(\mathbf{h})$ , dû au fait que l'espérance de l'estimateur était une constante. Malgré que cette égalité n'est théoriquement plus valide dans le cas du krigeage ordinaire, cette hypothèse est tout de même appliquée dans la pratique.

Une fois le système d'équations linéaires résolu, on obtient

$$\boldsymbol{\lambda}_{ko}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{k}^{ko\top} \mathbf{K}^{ko-1}. \quad (\text{A.22})$$

L'estimateur et la variance du krigeage ordinaire sont obtenus par substitution dans (A.18), ce qui donne

$$\hat{\mathbf{y}}_{ko}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{k}^{ko\top} \mathbf{K}^{ko-1} \mathbf{y}(\mathbf{x}), \quad (\text{A.23})$$

$$\sigma_{ko}^2 = C(0) - \mathbf{k}^{ko\top} \boldsymbol{\lambda}_{ko}(\hat{\mathbf{x}}). \quad (\text{A.24})$$

\*

**Krigeage universel** Le krigeage universel<sup>2</sup> est similaire aux deux approches précédentes. Cette fois-ci par contre, on vient estimer l'espérance de la fonction à l'aide d'un polynôme de degré un ou plus élevé interpolant les *coordonnées* du point. La forme de l'espérance, au point d'estimation par exemple, devient alors

$$\boldsymbol{\mu}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})^\top \boldsymbol{\beta}, \quad (\text{A.25})$$

où  $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$  contient les coordonnées du point d'estimation (fonctions de base) et  $\boldsymbol{\beta}$  les coefficients du polynôme. Par exemple, pour un polynôme linéaire avec une seule fonction objectif et deux variables de conception, on aurait

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = [1 \quad \hat{x}_1 \quad \hat{x}_2], \quad (\text{A.26})$$

$$\boldsymbol{\beta} = [a_0 \quad a_1 \quad a_2], \quad (\text{A.27})$$

En substituant cette forme polynomiale pour l'espérance dans (A.1), on obtient

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}_{ku}(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})^\top \boldsymbol{\beta} + \sum_{\alpha=1}^A \lambda_{\alpha}^{ku} (\mathbf{y}(\mathbf{x}_{\alpha}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{\alpha})^\top \boldsymbol{\beta}), \\ &= \sum_{\alpha=1}^A \lambda_{\alpha}^{ku} \mathbf{y}(\mathbf{x}_{\alpha}) + \left[ \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})^\top - \sum_{\alpha=1}^A \lambda_{\alpha}^{ku} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{\alpha})^\top \right] \boldsymbol{\beta}. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

---

2. Certains auteurs y font référence sous la bannière *kriging with trend*.

Comme dans le cas du krigeage ordinaire, cette équation doit être valide peu importe la valeur des coefficients polynomiaux  $\beta$ . On introduit donc la contrainte

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})^\top = \sum_{\alpha=1}^A \lambda_{\alpha}^{ku} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{\alpha})^\top. \quad (\text{A.29})$$

Comme pour les deux cas précédents, minimiser la variance d'estimation nous amène à minimiser le Lagrangien

$$L = \sigma_E^2 + 2 \sum_{p=1}^P \mathcal{L}_p \left[ f_p(\hat{\mathbf{x}}) - \sum_{\alpha=1}^A \lambda_{\alpha}^{ku} f_p(\mathbf{x}_{\alpha}) \right], \quad (\text{A.30})$$

où  $P = M + 1$ , est le nombre de fonctions de base requises dans le cas d'un *polynôme linéaire*, et  $M$  est le nombre de variables de conception.

Par la suite, on construit le système d'équations linéaires à résoudre pour les poids de krigeage universel et les  $P$  paramètres de Lagrange  $\mathcal{L}_p$ , ce qui donne

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^A \lambda_{\beta}^{ku} C_r(\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}_{\beta}) + \sum_{p=1}^P \mathcal{L}_p f_p(\mathbf{x}_{\alpha}) = C_r(\mathbf{x}_{\alpha} - \hat{\mathbf{x}}), & \alpha = 1, \dots, A, \\ \sum_{\beta=1}^A \lambda_{\beta}^{ku} f_p(\mathbf{x}_{\beta}) = f_p(\hat{\mathbf{x}}), & p = 1, \dots, P. \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

On note que dans le cas limite où  $P = 1$ , on obtient exactement les équations du krigeage ordinaire et lorsque  $P = 0$ , i.e. aucune fonction polynomiale, on obtient alors les équations du krigeage simple.

Comme auparavant, on peut réécrire le système d'équations ci-haut sous forme matricielle

$$\mathbf{K}^{ku} \boldsymbol{\lambda}_{ku}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{k}^{ku}. \quad (\text{A.32})$$

La matrice de covariance  $\mathbf{K}^{ku}$  pour le krigeage universel est presque identique à celle du krigeage ordinaire  $\mathbf{K}^{ko}$ . On doit toutefois y ajouter  $P$  colonnes et  $P$  rangées pour tenir compte des  $P$  paramètres de Lagrange.<sup>3</sup> De manière similaire, le vecteur d'inconnues  $\boldsymbol{\lambda}_{ku}(\hat{\mathbf{x}})$  et de covariance  $\mathbf{k}^{ku}$  doit être *augmenté*. À titre de visualisation, on a

$$\left[ \begin{array}{c|c} [\mathbf{C}_r]_{\alpha \times \beta} & [\mathbf{f}(\mathbf{x}_{\alpha})]_{\alpha \times p} \\ \hline [\mathbf{f}(\mathbf{x}_{\beta})]_{p \times \beta}^\top & [\mathbf{0}]_{p \times p} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} [\boldsymbol{\lambda}^{ku}]_{\beta \times 1} \\ \hline [\mathcal{L}]_{p \times 1} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} [\mathbf{C}_r]_{\alpha \times 1} \\ \hline [\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})]_{p \times 1} \end{array} \right]. \quad (\text{A.33})$$

Une fois résolu, on n'a qu'à substituer les poids de krigeage universel afin d'obtenir l'esti-

---

3. Dans le krigeage ordinaire, on a ajouté 1 colonne et 1 rangée étant donné que nous avons 1 seul paramètre de Lagrange.



mateur et sa variance. On note qu'il est aussi possible d'obtenir les coefficients de régression optimaux  $\beta^*$  de la partie déterministe  $\mu(\hat{\mathbf{x}})$ . Ceux-ci peuvent être obtenus à partir d'un *moindre carré généralisé* (Cressie and Wikle, 2011) tel que

$$\beta^* = \left[ \mathbf{f}(\mathbf{x}_\alpha)^\top \mathbf{C}_r^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_\alpha) \right]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_\alpha)^\top \mathbf{C}_r^{-1} \mathbf{y}(\mathbf{x}_\alpha), \quad (\text{A.34})$$

où la variance de l'erreur de ces coefficients est

$$\text{Var}(\beta^*) = \left[ \mathbf{f}(\mathbf{x}_\alpha)^\top \mathbf{C}_r^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_\alpha) \right]^{-1} \quad (\text{A.35})$$

Ces quantités sont utiles lorsque l'on veut estimer la qualité de la régression de la partie déterministe de l'estimateur de krigeage.

Une implantation numérique du krigeage universel est disponible sous la forme d'un toolbox dans Matlab (voir Lophaven et al., 2002b,c).

Pour terminer, on note l'existence d'autres variantes de krigeage comme le *cokrigeage* et le *krigeage avec indicateurs*. Ces notions sont trop avancées pour être inclues dans cette thèse, mais sont toutefois disponibles dans (Goovaerts, 1997).

\*

**Modèle de covariance** Le choix du modèle de covariance entre les points dépend généralement du type de phénomène à analyser. Toutefois, (Isaaks and Srivastava, 1989; Sacks et al., 1989) suggèrent lorsque possible d'utiliser un modèle Gaussien pour des fins de krigeage. Un tel modèle pour la covariance entre les points  $C(\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta)$  est

$$C(\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta) = \sum_{\alpha, \beta=1}^A \exp\left(-\theta \mathbf{d}_{\alpha, \beta}^2\right), \quad \mathbf{d}_{\alpha, \beta} = \mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta, \quad (\text{A.36})$$

où  $\theta$  est le paramètre de covariance et  $\mathbf{d}_{\alpha, \beta}$  le vecteur distance entre les points  $\mathbf{x}_\alpha$  et  $\mathbf{x}_\beta$ . Notons qu'un phénomène d'anisotropie peut exister, c'est-à-dire que le paramètre  $\theta$  pourrait varier en fonction de la nature des variables de conception. Dans ce cas-ci, on pourrait avoir au maximum  $M$  paramètres de covariance, où  $M$  est le nombre total de variables de conception.

Finalement, on se contente de mentionner que l'obtention des paramètres  $\theta$  se fait à travers une minimisation d'une fonction de vraisemblance sur l'espace paramétrique (l'ensemble des points), ce qui assure une variance minimale, Dietrich and Osborne (1991).

## ANNEXE B    RÉSUMÉ POUR LA COMPRÉHENSION ET LA MODIFICATION DE LA STRUCTURE D’UN FICHIER INPUT DANS ABAQUS

L’objectif de ce document est d’aider le lecteur à comprendre et à se familiariser avec la structure d’un fichier input pour ABAQUS. Le lecteur sera par la suite capable de modifier un fichier input avec l’interface graphique d’ABAQUS (CAE) et de l’utiliser avec les sous-routines VUMAT et UMAT. L’emphase est placée sur la compréhension de la structure du fichier input, et non sur comment utiliser ABAQUS CAE pour lancer une simulation ni comment créer un input file de A à Z.

\*

### Création d’un modèle dans ABAQUS/CAE

Comme introduction, voici tout d’abord un survol des étapes nécessaires à la création d’un modèle dans CAE pour des fins de simulations. Pour plus détails, le lecteur devrait consulter le Chapitre 11 du livre *A First Course in Finite Elements* par Jacob Fish et Ted Belytschko.

CAE est divisé en plusieurs modules. Nous discutons ici des étapes nécessaires dans chaque modèle afin d’effectuer une simulation de base. Les commandes du logiciel sont en anglais, d’où la raison pour laquelle nous allons y faire référence en anglais.

#### 1) **Part Module**

- Dessiner la pièce.

#### 2) **Property Module**

- Créer le matériau. Nous allons modifier cet aspect plus tard dans le fichier input. Pour l’instant, utilisons simplement un matériau élastique. S’assurer de donner un module de Young et une densité réaliste.
- Créer la section.
- Assigner la section à la pièce.

#### 3) **Assembly Module**

- Ajouter la pièce à l’assemblage. (Le bouton s’appelle “Instance Part”).

#### 4) **Step Module**

- Créer le Step. **Important :** Pour un VUMAT, il faut choisir “Dynamic, Explicit”, tandis que pour un UMAT, il faut choisir “Static, General”. Pour les deux types de Step, “Time period :” indique le temps de simulation total.

**Pour “Dynamic, Explicit”**

- La commande ”Mass Scaling” → Cliquer sur “Use scaling definitions below”
- Cliquer “Create..” → Mettre la valeur de l’ajustement dans “Scale by factor”.

## 5) Load Module

- Créer les conditions aux frontières. Choisir une condition de chargement.

## 6) Mesh Module

- Commencer par “Seed” la pièce selon le maillage désiré.
- Assigner un type d’élément (bouton appelé “SAR”). **Important :** En haut du menu d’options, choisir “Standard” pour un UMAT et “Explicit” pour un VUMAT. **Important :** Certaines sous-routines VUMAT et UMAT sont codées pour des éléments en état plan de déformation SEULEMENT. Il faut donc choisir l’élément approprié.
- Créer le maillage.

## 7) Job Module

- Créer la “Job”.
- Sur l’arbre logique “Model Database”, ouvrir l’onglet “Analysis” → ouvrir l’onglet “Jobs” → Cliquer avec le bouton droit sur la “Job” et soumettre.

Dépendamment de la manière dont le modèle CAE a été créé, le travail soumis peut ne pas avoir terminé jusqu’à la fin. Avant de procéder à la prochaine étape, il est toutefois recommandé de s’assurer que ce modèle de base roule jusqu’à la fin avec les fonctionnalités intégrées d’ABAQUS avant d’implémenter un modèle plus complexe à l’aide d’une sous-routine. Cela facilite le débogage par la suite.

\*

En ce qui à trait aux unités dans ABAQUS

Comme tout logiciel par éléments finis, ABAQUS n’a pas de systèmes d’unités prédéfinis. L’utilisateur détermine quelles unités il veut et doit demeurer consistant dans son choix. Par exemple, soit le système MKS (mètre-kg-seconde), les unités de base et les unités dépendantes sont données à la Table ci-dessous.

Unité de base	Longueur	m
	Masse	kg
	Temps	s
	Température	K
Unité dépendente	Force	N
	Contraintes	Pa
	Énergie	J
	Densité	kg/m <sup>3</sup>

Donc, si l'utilisateur définit la géométrie en mètres (m) et applique un chargement en Newton (N), le module de Young devra donc être définie en pascal (Pa).

\*

### Introduction au fichier Input

L'objectif de cette section est de familiariser l'utilisateur à la structure et à la nomenclature utilisée dans un fichier Input de ABAQUS ainsi qu'aux modifications nécessaires à faire à ce fichier pour une utilisation avec une sous-routine VUMAT et UMAT. Dans ce qui suit, les différentes parties du fichier Input seront décrites les unes après les autres. Cette section est basée sur un fichier input typique créé depuis un modèle CAE tel que défini à la section précédente, lancé par le solveur Explicit.

1) **En-tête** : Les premières lignes du fichier Input original sont :

```
*Heading
** Job name: tension_job_raw Model name: Model-1
** Generated by: Abaqus/CAE 6.10-1
*Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO
```

La seule commande nécessaire ici est **\*Heading**. Tout le reste peut être supprimé. Une modification se fait généralement l'en-tête de la manière suivante

```
*Heading
TENSION UNIAXIALE
```

où nous avons introduit la ligne **TENSION UNIAXIALE** dans la ligne immédiatement après **\*Heading**. Ceci décrit le modèle contenu dans le fichier Input et sera affiché dans l'ODB.

2) **Parameters** : Après l'en-tête, nous insérons les nouvelles lignes suivante :

```
*Parameter
** strain rate (positive for tension, negative for compression)
edot = 1.e-1
**
** final strain (positive for tension, negative for compression)
ef = 0.05
**
** initial length of element
l0 = 20.e-3
**
** mass scaling factor
mass_factor = 1.e3/(edot*edot)
**
** total simulation time
tf = ef/edot
**
** velocity
vel = l0*ef/tf
```

La commande `*Parameter` définit la région du fichier Input où l'utilisateur est libre de définir des variables et des équations sur les variables. Ici, nous avons défini le taux et la déformation totale désirée, la longueur initiale de l'élément et le "Mass scaling factor" (pour une utilisation dans un VUMAT). Nous pouvons par la suite travailler avec ces quantités afin de calculer le temps de simulation total et la vitesse de déplacement.

3) **Définition des noeuds** : Cette partie définit l'emplacement des noeuds. De manière générale, nous avons

```
*Node
1, 0.0, 0.0
2, 10.0, 0.0
3, 10.0, 10.0
4, 0.0 , 10.0
...
```

Ceci définit les coordonnées de tous les noeuds du modèle. Par exemple, le noeud 1 à sa position en x située à 0 et sa position en y située à 0. Puisque le modèle à été créé dans CAE, aucune modification n'est nécessaire.

- 4) **Définition des éléments** : Dans cette section du fichier Input, on définit les éléments du modèle. De manière générale, nous avons

```
*Element, type=CPE4R
1, 1, 2, 3, 4
...
```

Le texte `type=CPE4R` définit le type d'élément utilisé. Ici, nous avons spécifié un élément à 4 noeuds, à intégration réduite et en état plan de déformation. On peut modifier le type d'élément ici sans devoir retourner à CAE.

Les lignes après `*Element, type=CPE4R` définissent la matrice de connectivité de l'élément. Par exemple, l'élément 1 est composé, dans le sens antihoraire, des noeuds 1, 2, 3 et puis 4.

- 5) **Regroupements des noeuds et éléments** : Après la définition des éléments et des noeuds, on retrouve plusieurs lignes similaires aux lignes suivantes :

```
*Nset, nset=Part-1-1__PickedSet2, generate
1,231, 1
*Elset, elset=Part-1-1__PickedSet2, generate
1,200, 1
...
```

La ligne `*Nset` définit un groupe de noeuds. Voici quelques exemples :

— Voici un Nset sans génération automatique

```
*Nset, nset=test1
1,20,33,55
```

— Voici un Nset avec génération automatique

```
*Nset, nset=test2, generate
1,5,1
```

Ce groupe de noeud sera dénoté test2 et contiendra les noeuds 1, 2, 3, 4 et 5, donc tous les noeuds de 1 à 5 suivis par un incrément de 1.

C'est exactement la même chose pour le regroupement d'éléments, où on utilise la commande **\*Elset**

**Important :** Lorsqu'on modifie le nom d'un groupe de noeuds ou d'éléments, il est important de le modifier partout où celui-ci est utilisé.

- 6) **Définition du matériau :** Dans le code, il y a généralement les lignes suivantes :

```
*Material, name=elastic
*Density
7800.,
*Elastic
2.1e+11, 0.3
```

Cette partie du code définit le modèle constitutif du matériau ainsi que les paramètres correspondants. Dans ce cas-ci, le matériau est **élastique**. Pour un matériau élastique, nous avons simplement besoin du module de Young, ici  $E = 210GPa$ , du coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , et de la densité  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ . Nous allons bientôt adapter cette section pour qu'elle soit compatible avec une sous-routine.

Quelque part dans le code (généralement après la définition des noeuds, mais avant la définition du matériau), il y aura

```
** Section: Section-1
*Solid Section, elset=ElAll, material=elastic
*System
```

La commande **\*Solid Section** assigne aux éléments du groupe **ElAll** le modèle constitutif **elastic** ainsi que les propriétés définies. Les deux lignes suivant cette commande ne sont pas importantes et peuvent être supprimées. On peut définir le matériau avant ou après la commande **\*Solid Section** sans problèmes.

Par bonne habitude, il est utile de réarranger les commandes précédentes de la manière suivante :

```
**
** MATERIAL MODEL
**
*Solid Section, elset=ElAll, material=elastic
**
```

```

*Material, name=elastic
*Density
7800.,
*Elastic
2.1e+11, 0.3

```

Nous allons maintenant ajouter un matériau défini par l'utilisateur, ou communément appelé "user material". Dans cet exemple, nous allons ajouter un modèle constitutif pour une théorie des petites déformations, avec plasticité isotrope indépendante du taux de chargement contenant 5 propriétés matériau.

```

**
** MATERIAL MODEL
**
*Solid Section, elset=ElAll, material=smallDef_ri_iso
**
*Material, name=elastic
*Density
7800.,
*Elastic
2.1e+11, 0.3
**
*Material, name=smallDef_ri_iso
    *** Eyoung
    *** poisson
    *** Y0
    *** kHard
    *** nHard
*User material, Constants=5
70.e9,0.3,250.e6,1000.e6,0.7
*Density
2400.0
*Depvar
15

```

Dans `*User material, constants=5`, le chiffre 5 indique qu'il y a 5 paramètres matériau à définir, ceux-ci sont donnés à la ligne suivante.



**Important :** On peut seulement indiquer 8 valeurs (propriétés matériau) par ligne. Par exemple, pour un matériau à 14 paramètres, on devrait écrire

```
*User material, Constants=14
1,2,3,4,5,6,7,8,
9,10,11,12,13,14
```

La commande `*Depvar`, et la ligne immédiatement après, indiquent à ABAQUS le nombre de variables internes que nous allons utiliser dans nos sous-routines VUMAT et UMAT.

Dans notre cas, nous aurons donc 15 variables que nous allons mémoriser (Dans un VUMAT par exemple, ceux-ci pourraient être les 6 composantes de déformation plastique, les 6 composantes de contraintes de Cauchy, la déformation plastique équivalente, le taux de déformation plastique équivalente et la résistance isotrope).

- 7) **Conditions initiales :** Dépendamment de la simulation en question, il peut s'avérer nécessaire de prescrire des conditions initiales (généralement, la température). À cette fin, on insère le code suivant

```
*****
**                               INITIAL CONDITIONS
*****
*Initial Conditions, Type=Temperature
nall, 298.0
```

Ici, au groupe de noeud `hall` est prescrit la température initiale de 298.

- 8) **Amplitudes :** Si nécessaire, on peut définir un programme d'amplitude comme suit

```
*****
**                               VELOCITY AMPLITUDE DEFINITION
*****
*Amplitude, name=disp_profile
0.0,0.0,100,1e-3
```

Cela indique qu'au temps  $t = 0$ , l'amplitude est  $a = 0$ , puis on augmente linéairement de telle sorte qu'à  $t = 100$ , l'amplitude est maintenant  $a = 1e - 3$ . On peut appliquer cet historique d'amplitude à n'importe quelle condition aux frontières, comme décrit ci-bas.

9) **étapes** : Chaque étape d'analyse, ou "Step", ressemble à

```

**
** STEP: Step-1
**
*Step, name=Step-1
Loading
*Dynamic, Explicit
,10.
*Bulk Viscosity
0.06, 1.2
** Mass Scaling: Semi-Automatic
**               Whole Model
*Fixed Mass Scaling, factor=1e+06
**
** BOUNDARY CONDITIONS
**
** Name: bottom_sym Type: Displacement/Rotation
*Boundary ? bottom, 2, 2
** Name: left_sym Type: Displacement/Rotation
*Boundary
left, 1, 1
** Name: top_vel Type: Velocity/Angular velocity
*** *Boundary, type=VELOCITY, amplitude=load_profile
**
* top, 2, 2, 1
**
*Boundary, type=VELOCITY
top, 2, 2, 1e-5

```

Avant de décrire les différents termes, modifions et faisons le ménage dans le code précédent

```

**
** Loading Step

```

```

*Step, name=loading
*Dynamic, Explicit
,<tf>
**
*Fixed Mass Scaling, factor=<mass_factor>
**
** BOUNDARY CONDITIONS
**
*Boundary
bottom, 2, 2, 0.0
*Boundary
left, 1, 1, 0.0
*Boundary, type=VELOCITY
top, 2, 2, 1e-5
**

```

Ici,

- La commande `*Step, name=loading` débute l'étape d'analyse avec le nom loading (toutes les étapes DOIVENT avoir des noms différents).
- La commande `*Dynamic, Explicit` définit le type d'étape utilisée. Dans ce cas, nous avons une étape explicite, ce qui signifie que nous allons utiliser un VUMAT. Dans le cas d'un UMAT, on utilise plutôt `*Static` (pour une analyse couplée avec la température, cette ligne doit être encore modifiée). À la ligne d'après, la première valeur (laissée vide), indique l'incrément de temps initial, la seconde valeur indique le temps total de la simulation. À noter que nous utilisons ici des paramètres que nous avons définis auparavant. Pour utiliser la variable `tf`, qui est le temps de simulation total, nous devons l'écrire `<tf>`.
- La commande `*Fixed Mass Scaling, factor=<mass_factor>` définit l'ajustement de la masse (voir la documentation pour plus d'informations). Ici encore, nous avons utilisé le paramètre `mass_factor` défini auparavant.
- La commande

```

*Boundary
bottom, 2, 2, 0.0

```

définit la condition aux frontières de déplacement pour tous les noeuds du groupe

de noeuds **bottom**. Dans ce cas-ci, le degré de liberté 2 (déplacement selon y) est prescrit un déplacement nul, 0.0.

— La commande

```
*Boundary, type=VELOCITY
top, 2, 2, 1e-5
```

défini une condition aux frontières de vitesse pour tous les noeuds dans le groupe de noeuds **top**. Dans ce cas ci, tous ces noeuds auront une vitesse égale à  $1 \times 10^{-5}$  m/sec dans la direction y.

- 10) **Outputs** : Il y a deux différents types de outputs qu'il est possible de demander à ABAQUS, soit les "fields outputs" et les "history outputs". Les "field outputs" sont eux qui peuvent être affichés en tant que "contour plots", i.e. un contour de contraintes. Les "history outputs" sont sauvegardés sous la forme de données x-y, i.e. la force vs le temps et les déplacements vs le temps. Les différents types de outputs doivent être définis à l'intérieur d'un Step. La commande ressemble à

```
** FIELD OUTPUT: F-Output-1
**
*Output, field, variable=PRESELECT
**
** HISTORY OUTPUT: H-Output-1
**
*Output, history, variable=PRESELECT
**
*End Step
```

**Important** : Après que les outputs ont été demandés dans un Step, il est important de terminer avec la commande **\*End Step**.

Nous ne sommes pas intéressés par les variables "preselected". Nous allons donc modifier le bloc ci-haut

```
**
** FIELD OUTPUT
*Output, field, number interval = 10
*Element output, elset=Elall
```

```

s,le,sdv,peeq
*Node output, nset=nall
u
**
** HISTORY OUTPUTS
*Output, history
*Node output, nset=top
rf2,u2,v2
*Energy output
allie,allke
**
*End Step

```

Ici

- Tout ce qui est écrit sous la commande `Output, field, number interval = 10` sera disponible comme field output.
- La commande `number interval = 10` indique que seulement 10 field outputs seront créés au courant de l'étape courante. Plus on demande de outputs, plus le fichier de sortie sera grand.
- La commande

```

*Element output, elset=Elall
s,le,sdv,peeq

```

sous l'objet `*output, field`, demande que les variables élémentaires `s`, `le`, `ddv`, `peeq` soient disponibles pour tous les éléments dans le groupe `ElAll` pour des fins de visualisation.

- Tout ce qui est placé sous la commande `*Output, history` sera disponible comme history output.
- La commande

```

*Node output, nset=top
rf2,u2,v2

```

sous l'objet `*output, history`, demande que les variables nodales `rf2,u2,v2` soient disponibles pour tous les noeuds dans le groupe `top`. Cela nous permettra donc de tracer des graphiques de la force vs déplacement, par exemple. Ici, `rf2` est

la force de réaction aux noeuds dans la direction y, **u2** le déplacement des noeuds dans la direction y, et **v2** la vitesse des noeuds dans la direction y.

— La commande

```
*Energy output  
allie,allke
```

demande l'historique de l'énergie interne et de l'énergie cinétique du système. Pour une simulation explicite, on doit s'assurer que l'énergie cinétique est grandement inférieure à l'énergie interne et que notre facteur de *mass scaling* est approprié.

— Finalement, la commande **\*End Step** termine l'étape.

**\***

Démarrer une simulation

À partir du terminal “Abaqus Command terminal”, l'utilisateur peut lancer une simulation en tapant la commande suivante :

```
abaqus double inp=input_file_name.inp user=user_subroutine_name.for  
job=job_name background
```

À noter que cette commande doit être lancée dans le même dossier où sont situés les fichiers input et UMAT ou VUMAT.

### Considérations additionnelles

- Lorsqu'une simulation est lancée, il faut analyser fichier .log afin de voir le statut du travail. Ce fichier indiquera s'il y a une erreur.
- Le fichier .stat indique le statut de l'intégration numérique. C'est le fichier à regarder pendant que la simulation roule.
- S'il y a une erreur dans le fichier Input, celle-ci apparaîtra dans le fichier .dat.
- Le fichier .odb est le fichier principal où les résultats sont imprimés. On doit l'ouvrir avec ABAQUS CAE ou Viewer afin de visualiser les résultats.